パーコレーション

1　パーコレーションとは

パーコレーションとは、日本語で「浸透現象」のことです。
どのようなシミュレーションをするのかは具体的な絵を見た方が分かりやすいので、まず図 1 を見てください。灰色の丸が 5x5 の格子点上に並んでいます。この格子点がサイトです。その丸と丸を結合している線がボンドです。パーコレーションではこの各サイトや各ボンドをある確率で ON にします (占有された状態といいます)。シミュレーションでは (擬似) 乱数を用いて決定します。
図 2 にその様子が描かれています。ここでは ON の状態にあるサイトを灰色で描き、OFF の状態にあるサイトは描いていません。また全てのボンドは ON になっているとしています。この時、ON になっているサイトとボンドを通って、端から反対側の端まで行くことが出来るでしょうか？すぐに見て分かるとおり、一番右側にあるサイトを伝って上端から下端まで行くことが出来ます。このとき「浸透」しているといいます。

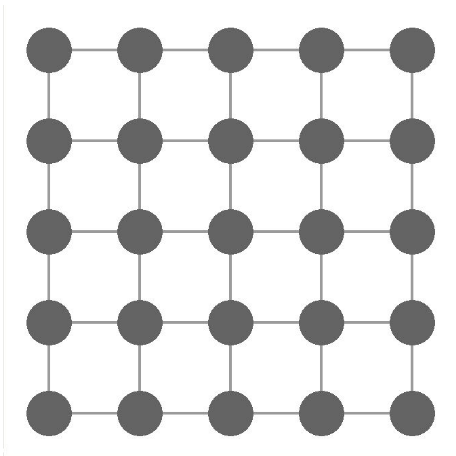

図 1　パーコレーションの模式図

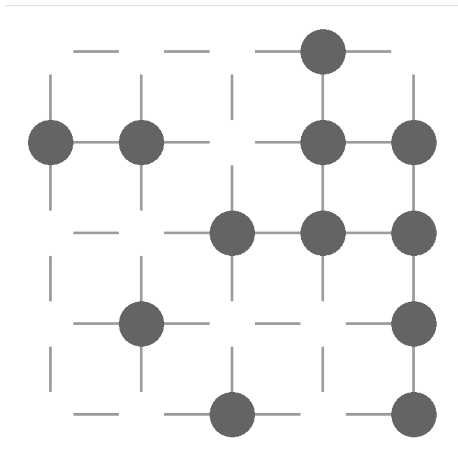

図 2　占有されたサイトとボンド

2　パーコレーションのバリエーション

パーコレーションには色々なバリエーションがあります。図 1,2 では 2 次元の正方格子のサイトとボンドを考えましたが、次元を変えたり 3 次元にしたり、格子を三角格子にしたりと様々なバリエーションがあります。基本的にはサイトとボンドをある確率で占有して、端から端までの浸透を調べます。特にボンドが常に ON として、サイトだけを考える

ものをサイトパーコレーション。逆に、サイトが常に ON になっていて、ボンドだけを考えるものをボンドパーコレーションといいます。また、格子の端が反対側の端と繋がっているような周期的境界条件のパーコレーションを考えることも在ります。2 次元で周期的にすると、ドーナツ (トーラス) の表面のパーコレーションになります。

3 浸透の相転移

パーコレーションの面白いところは、サイトやボンドに与える確率によって浸透が起きるか動かが劇的に変化する点です。
無限の大きさのパーコレーションにおいては、あるサイトやボンドを占有する確率を変えていくとある確率 (臨界確率) を境にして、浸透が起きる確率が 0 から 1 になります。この点を相転移点と言います。実際のシミュレーションでは有限サイズのものしか調べられないので、浸透が起きる確率が 0 から 1 に急に変わることはありません。したがって、シミュレーションでは相転移が起きる臨界確率がはっきりとは分からないのですが、シミュレーションをした結果を解析することでかなりの精度で求められています。また、稀に数学的に厳密に臨界確率が求まっているモデルも存在します。2 次元正方格子のボンドパーコレーションは厳密に臨界確率が 0.5 です。2 次元正方格子のサイトパーコレーションは臨界確率が 0.593 程度であることが、シミュレーションから分かっています。

4 クラスターの解析

パーコレーションにおけるクラスターとは、互いに ON の状態のボンドで接続している、ON の状態にあるサイトの集まりのことです。先ほどの図 2 を見てください。図にはクラスターが全部で 4 つあり、それぞれ大きさが 8,2,1,1 となります。
クラスターを使って「浸透」を考えると、「浸透」が起こるということは、端から端まで到達しているクラスターがあるということなります。図 3 の赤く色付けしたクラスターが「浸透」しているクラスターです。図 4 は 20x20 のサイトパーコレーションにおける浸透しているクラスターです。赤と青に色付けされた 2 つの浸透クラスタがあることが分かります。
実際のシミュレーションでは、これのクラスターを解析することで浸透しているかどうかを判断します。また、このクラスターの直線的な長さや、クラスターに含まれるサイトの数、クラスターのサイズの分布などが、相転移点で特異的な振る舞いをすることが分かっており、物理学の解析手法である有限サイズスケーリングや繰り込み群などの方法で、サイズを無限に大きくしたときの臨界確率を近似的に求める研究がなされています。
さらに、クラスター自身の形がフラクタルと呼ばれる図形になっていることも知られています。図 5 は臨界点付近の 5000 × 5000 のサイトボンドパーコレーションのシミュレー

ションした結果です。浸透したクラスターが複雑な図形になっていることが見てとれます。

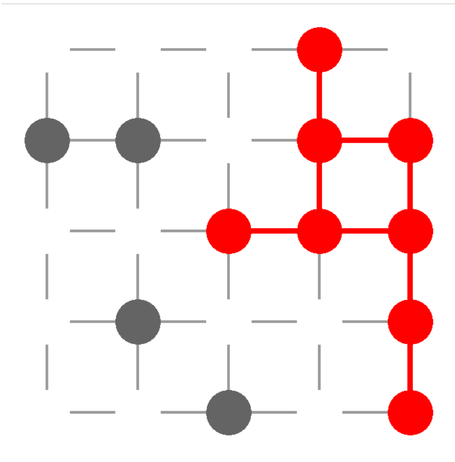

図 3　浸透しているクラスター

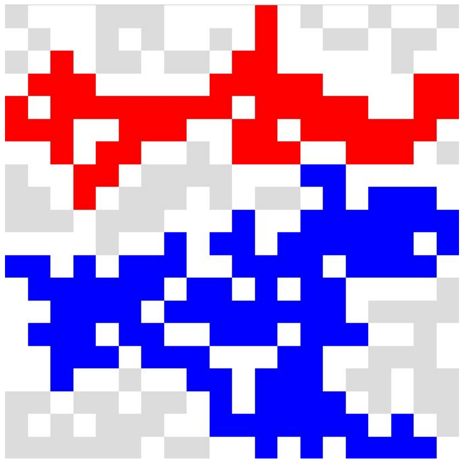

図 4　浸透している 2 つのクラスター

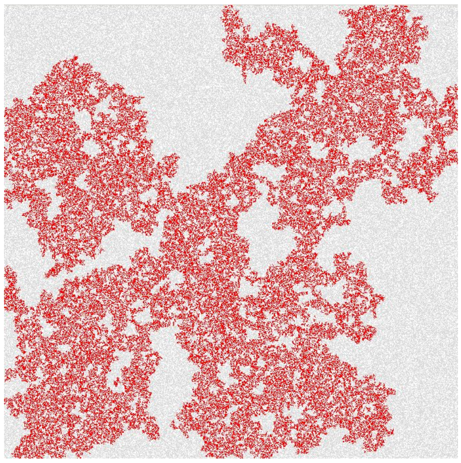

図 5　クラスターのフラクタル構造

5　おわりに

パーコレーションのモデルそのものは簡単ですが、実際の自然現象のモデルの説明に使われたり応用が広く、問題自体に含まれている物理や数学は非常に奥深く面白いものです。また、数学や物理が良く分からなくても、シミュレーションを可視化すると何が起きているかが見た目にも分かりやすく、色々な確率を設定して遊んでみるだけでも十分に楽しい題材かと思います。