1992年度　入学試験 一般教育科目

■ 教育 英語

1. 以下の英文を読み、設問に答えよ。解答は解答用紙の所定欄に記せ。

For a news conference at the Japan Press Center in Tokyo, it was a humble affair. Only about a dozen reporters were present Thursday when three people from India made a quiet appeal to the Japanese people about a giant dam project on the Narmada River, which empties into the Gulf of Cambay 400 kilometers north of Bombay.

As a result of the project 25,000 hectares of fertile farmland and forests will be submerged under water, the Indians said. About 100,000 people are being driven out of their homes in 248 villages along the 200 kilometer upper reaches of the river. Sixty percent of these people are of ethnic minority groups.

The relocation plans are inadequate. The dam project will not only cause environmental destruction through the loss of forests but also destroy the traditional lifestyles of local people. (a)Would urban residents, the three Indians asked, wish for an increase in the power supply in exchange for the life of people who pick fruit in the primeval forests and make their living by selling wood products? A total of 12,000 people staged a 24-hour sit-down demonstration against the project last month. (b)People around the world are casting critical eyes on Japan now. Together with the World Bank, Japan is helping finance the Indian dam project through its Official Development Assistance program. The order for power generators to be used in the project has been placed with a Japanese company. “Do the people of Japan know that part of the taxes they pay is being used in this way?” the three Indians asked at their news conference. Honestly, we didn’t know. We haven’t been informed.

(c)The Overseas Economic Cooperation Fund, the agency which represents Japan in the project, have not even bothered to study the impact the project will have on the environment and the area’s inhabitants. The three Indians urged the Japanese to pay attention to the matter of who will lose from the project and who will gain. I think they were greately reserved in making their point.

–quoted, with modification, from *Tensei Jingo-’90 Summer Edition*, Hara Shoboh.

Official Development Assistance : 政府開発援助
Overseas Economic Cooperation Fund : 海外経済協力基金

[設問]

(i) 下線部 (a) を 100 字以内で和訳せよ。

(ii) 下線部 (b) を 100 字以内で和訳せよ。

(iii) 下線部 (c) を 100 字以内で和訳せよ。

2. 以下の英文を読み、設問に答えよ。解答は解答用紙の所定欄に記せ。

A new survey of extraordinary prolific researchers raises once again the question who should be an author and who should not. Twenty researchers worldwide have published an article at least once every 11.3 days over the past decade, according to a report released last week. The top five researchers have published more than once a week.

Some of these authors are crystallographers who, by nature of their sophisticated equipment and experiences, collaborate with dozens of researchers who need their services. Co-authorship is usually given in return. Most of the others are scientists who run medium-sized to large laboratories or research groups that have tapped into a particularly fruitful line of research in their field. (a) In the top twenty, the single discipline most heavily representer is basic molecular chemistry, followed by transplant surgery. Biomedicalresearch, in general, accounts for more than half of the total.

As science finds itself under scrutiny as never before, many researchers are considering the old problem of authorship. Is the loan of a key reagent worth a co-authorship? How about a good idea? Regular guidance?

(b)As a result of cases in which prominent researchers were damaged by the revelation that papers on which they were listed as authors contained fablicated data (even though they had not done the research themselves),the debate over authorship is no longer academic. A laboratory director who initiates or supervises a project is now considered responsible for the accuracy of the data itself if he or she shares authorship.

An informal survey of many of the researchers on the list reveals that there are as many authorship policies as there are authors. Differences in authorship policies tend to be vary by discipline. Because chemistry experiments are relatively straight-forward and self-checking, the heads of prolific chemistry laboratories say they feel confident in simply providing ideas and oversight, along with regular review, to work (c)they will eventually co-sign. Frank Cotton, a Tezas A&M University chemist, says he selects — and co authors — most of the research projects in his laboratory because the grants are in his name, and are based on his proposals. Although he does little of the bench research, he says he guides his 15 to 25 researchers, examines their data, and has a hand in writing almost all the papers. On the other hand, “I only put my name on if I had the idea, started the study, or played an active part in it,” says Julia Polak, a Universilty of London pathologist. “My own criterion is that if I don’t understand it and haven’t been part of the writing of the paper, I don’t want my name on it.”

(d)Although there may never be firm, interdisciplinary rules about authorship, prolific researchers do seem to be aware now of the perils of appending their names to work they have not closely supervised.

–quoted, with modifications, from *Nature.*

fabricate :（この場合）捏造する

[設問]

(i) 下線部 (a) を 80 字以内で和訳せよ。

(ii) 下線部 (b) を 140 字以内で和訳せよ。

(iii) 下線部 (c) は具体的にはどういうことか記せ。

(iv) 下線部 (d) を 100 字以内で記せ。

3. 以下の英文を読み，次の問に答えよ。解答は解答用紙の所定欄にしるせ。

I must reiterate my feeling that experimental physicists always welcome the *suggestions* of the theorists. But the present situation is ridiculous. Theorists now sit on the scheduling committees at the large particle accelerators and can exercise veto power over proposals by the best experimentists. In the days when I was active in nuclear and particle physics, the theorists exercised their veto power in an acceptable manner–they held up to ridicule anyone who did “stupid experiments.” So, if anyone could be intimidated by such social pressures, and nearly everyone can be, they were effectively kept from doing stupid result, to find himself ridiculed by the much smarter theorists. A classic example was the experiment in which R.T.Cox found, in 1928, that the electrons emitted in the beta decay of radium E must be polarized–because they “double-scattered” with different probabilities to the left and to the right. Theorists couldn’t accept this result because it violated the principle of consetvation of parity, which they held to be sacred. So the important Cox discovery disappeared from sight until it was rediscovered “properly.” Nineteen years later, T.D.Lee and Frank Yang, to solve a serious problem in particle physics, proposed that parity might not be conserved in weak interactions. Several teams set up experiments to look for parity violations, and Lee and Yang’s suggestion was quickly found to conform to the structure of the real world. But the Nobel Prize for this change in paradigm went neither to Cox nor to Madam Wu and her collaborators, who proved Lee and Yang to be correct. Lee and Yang certainly earned their prize, but I believe the experimentalists should have shared in the glory.

Next year is the 100th anniversary of the Michelson-Morley experiment. That terribly important experiment couldn’t be done at the present time, as I think the following imagenary scene will show. Michelson and Morley tell the “scheduling committee” that they plan to measure the velocity of the earth through the ether by means of Michelson’s new inferometer. The theoretical astrophysicist on the committee asks, “How accurately will your method measure the velocity?” Michelson says, “To about one significant digit.” The theorist responds, “But we already know the velocity of the earth through the ether from astronomical observations to two or three significant figures.” All the menbers of the committee agree that the proposal is one of the nuttiest they’ve ever heard, and

Michelson and Morley find themselves turned down flat. So the experiment that led to the abandonment of the concept of the ether isn't done.

I wonder how many physical concepts that "everyone knows" to be true, as everyone knew parity conservation and the existence of the ether were true, would turn out to be false if experiments were again allowed to do nutty experiments.

–quoted, with modifications, from Luis W.Alvarez, *Adventures of a physicist*, Basic Books, N.Y.,1987.

nutty（米俗語）：foolish

[設問]

(i) 下線部分の英文を 140 字以内で和訳せよ。

(ii) この英文の要旨を 英語で 指定された行数内（100–200 語程度以内）で書け。

4. 次の文を 80 語程度以内に英訳せよ。解答は解答用紙の所定欄に記せ。

25 年ほど前までは，陽子はそれ以上分割できない粒子であると考えられていた。しかし，陽子と陽子，あるいは陽子と電子を高速で衝突させる実験を行ったところ，実際には陽子はさらに小さな粒子から構成されていることがわかった。その粒子は,「クォーク」と名付けられた。

–quoted with modifications from *A Brief History of Time*, by S.W.Hawking, Bantam Books, N.Y., 1988.

陽子 : proton　粒子 : particle　電子 : electron　クォーク : quark

5. 下記の文（いわゆるゼノンの逆理）の論理には不備がある。この文を読み，設問に答えよ。解答は解答用紙の所定欄に記せ。

先行する亀を後方からアキレスが追いかけたとする。追いかけ始めた時点で亀のいた場所にアキレスが到達したとき，亀は前方におり，その場所にアキレスが到達したときには亀はさらに前方にいる。

ゼノン : Zeno　アキレス : Achilles

(i) 下線部分の和文を 60 語程度以内で英訳せよ。

(ii) 出来るだけ短く，英語でこの文の論理の不備を説明せよ。

■ 教育 数学

1. 関数 $y(x)$ に対する次の常微分方程式について以下の設問に答えよ。

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) = -y^n$$

ただし、$y(0) = 1, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$ とする。

(i) $n = 0$ の場合の解を求めよ。

(ii) $y = \frac{z}{x}$ とおいて、z に対する微分方程式を導き、$n = 1$ の場合の解を求めよ。

(iii) $n = 0, n = 1$ の場合のほかに、ある整数 n に対して次の形の解

$$y = (1 + ax^2)^m$$

が存在することが知られている。その整数 n と、定数 m、a を求めよ。

(iv) $x = 0$ の近傍の解を x に関するべき級数に展開し、x^4 の項まで求めよ。

2. 3 行 3 列の行列に関して以下の設問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(ii) 行列に関する方程式

$$A^3 + aA^2 + bA + cE = 0$$

の係数 a,b,c を求めよ。但し E は 3 行 3 列の単位行列、 0 は零行列である。この結果を用いて行列

$$A^5 - 6A^3 - 4A^2 + 18E$$

を計算せよ。

(iii) 3 次元ベクトル空間 R^3 のベクトル $\vec{x}$ で、R^3 のあるベクトル $\vec{y}$ を用いて

$$\vec{x} = (A - E)\vec{y}$$

と表すことのできないものの一般形を求めよ。

3. 1 辺の長さ a の正三角形で構成される正 20 面体の体積を以下の手順に従って求めよ。図 1 は、正 20 面体を一つの頂点 A と中心 O を通る直線の方向から見た時の平面図であり、図 2 は、その直線と一辺 AB を含む平面で切った時の断面図である。なお断面図には正 20 面体の内接球も破線で示してある。

(i) 恒等式 $(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta$ を利用して、$\cos 5\theta$ を $\cos\theta$ の多項式で表せ。ただし i は虚数単位である。

(ii) 上の結果を利用して、$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ の値を求めよ。

(iii) 正 20 面体に内接する球の半径を求めよ。また内接点はどの様な点であるか。

(iv) 正 20 面体の体積を求めよ。

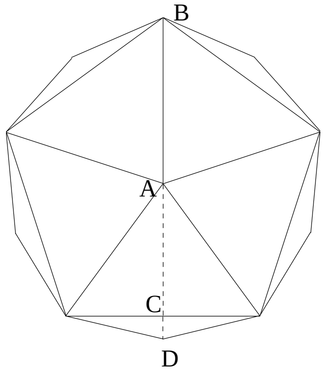


図 1

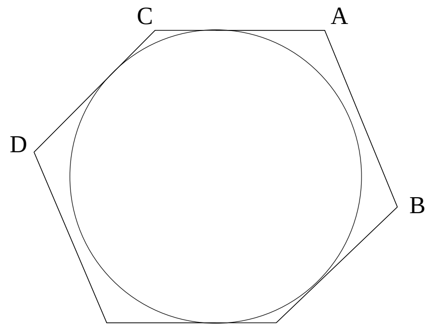


図 2

■ 教育 物理

1. **(i)** 単位ベクトル $\vec{n}$ を軸として角速度 ω で回転している座標系の直交底ベクトルを $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ とするとき，ベクトル

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

の時間変化が

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k} + \vec{\omega}\times\vec{A},\ \vec{\omega} = \omega\vec{n}$$

となることを用いて，一定の角速度 ω で回転する座標系における Newton の運動方程式を導き，遠心力とコリオリの力を求めよ。

(ii) バケツの水を鉛直線のまわりに一定の角速度 ω で回転させるとき，水面は遠心力によって放物線となることを示せ。ただし重力加速度を g とせよ。

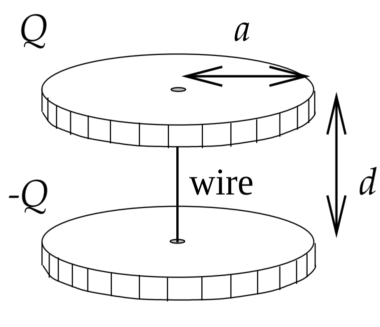
(iii) 赤道上で，高さ h の所から初速ゼロで地面に落下する質点はコリオリの力でどれだけずれるか。$h = 490$m のときのずれの大きさはどれ程か。簡単のため空気の抵抗は無視できるものとする。

(iv) A 君は **(iii)** の問題をコリオリの力を使わないで次のように考えた。地球の半径を R，自転の角速度を ω とすると，慣性系で見た時 h 上空の質点の水平速度は $(R+h)\omega$，地面の水平速度は $R\omega$ だから，結局高さ h の点から水平初速度 $h\omega$ で発射された質点が放物線を描いて地上に到達するまでの水平距離に等しいと考えた。その距離を求めよ。しかしこの距離はコリオリの力を用いた **(iii)** の結果と一致しない。その理由を考察せよ。

2. 半径 a の金属円板２枚を間隔 d で平行に向かい合わせて平行板コンデンサーを作り，上下の極板にそれぞれ $\pm Q$ の電荷を帯電させた。$d \ll a$ とし，円板の縁の電場の乱れは無視できるものとする。

(i) 平行板コンデンサーの静電容量 C を求め，極板間の電場のエネルギーが $Q^2/(2C)$ に等しいことを示せ。

時刻 $t = 0$ で，両極板間の中心を電気抵抗 R のまっすぐな針金（半径は a に比べて十分小さい）で，図１のようにつないだ。R は十分大きく，極板間の電荷分布は常に一様で，自己インダクタンスの効果は無視できるものとする。また，中心を通る針金からの距離を r とする。



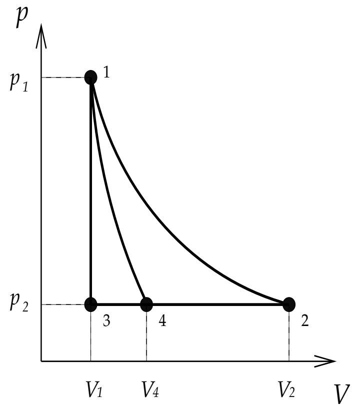
(ii) 時刻 t における極板の電荷 $q(t)$ 及び針金を流れる電流 $I(t)$ を求めよ。（答えは C を含む形で表せ）

(iii) 時刻 t で極板を流れる電流密度を r の関数として求めよ。また，変位電流はどうなるか。（答えは $I(t)$ を含む形で表せ）

(iv) 時刻 t で極板の間に生じる磁場の極板に平行な成分を r の関数として求めよ。また，コンデンサーの外側ではどうなるか，極板を流れる電流と関係づけて述べよ。

(v) 電磁場のエネルギーの流れを求め，針金に吸い込まれていくエネルギーとジュール熱を比較せよ。

3. １モルの理想気体に対して，体積 V と圧力 p の平面上で，図２のような状態変化を考える。$1\to2, 2\to3, 3\to1$ は，それぞれ，準静的等温過程，準静的等圧過程，準静的等積過程であるとして次の問に答えよ。



(i) $1 \to 2$ に対するエントロピー変化 ΔS_{12} はいくらか．体積 V_1, V_2 及び気体定数 R を用いて表せ。

(ii) １から２へ断熱的自由膨張で移ったとするとき，$\int d'Q/T$ を求めよ。但し，T は温度，Q は熱量である。この結果を前問の ΔS_{12} と比較することにより何がわかるかを説明せよ。

(iii) １から始まる準静的断熱過程により，２と３を結ぶ直線上の４に到達したとする。準静的断熱過程では $TV^{\gamma-1}$ が一定であることを示せ。但し，γ は定圧モル比熱と定積モル比熱の比である。これを用いて，V_4 の表式を V_1, p_1, p_2 の関数として求めよ。

(iv) $1 \to 4, 4 \to 3, 3 \to 1$ に対するエントロピー変化をそれぞれ計算せよ。循環過程 $1 \to 4 \to 3 \to 1$ におけるエントロピー変化はいくらになるはずか。これを用いて，前問と同じ V_4 の表式を求めよ。

■ 教育 英語 解答

1. **全訳**

東京・内幸町のプレスセンターという場所柄からすると、それはささやかな記者会見だった。インドからやってきた男女三人が昨日、十数人の記者を前に「日本の市民に良く知ってもらいたいこと」を静かな口調で語った。

ボンベイから北へ四百キロ。亜大陸の西部を流れる大河、ナルマダ川で着工された巨大ダムの話だ。この建設で、二万ヘクタールの豊かな農地と森林が水没する。上流域二百キロにわたって二百四十八の村があり、住民約十万人が追い立てられている。六割が少数民族だという。

移住計画も満足にできていない。大規模な森林喪失による環境破壊と伝統的な生活文化の崩壊と。(a)「都会の住 人は、原始林で果実 を採取し、木製品を売ることで、生計を立てている人々の暮らしと引き換え にしてまで、電力 の供給が増えることを望むでしょうか」と、三人のインド 人は問いかけた。 (91 字) 先月には一万二千人が昼夜、反対の座り込みをした。

(b) 現在、世界中の人が、日本に対し批判的な目を向けています。日本は、政府開発援助計画を通じ、世界銀行 と共同で、このインドのダム計画の資金を融資しようとしている。 (81 字) 揚水発電機を受注したのも、日本の企業だ。会見で、三人は「日本の国民は、税金がこんな形で使われているのを知っていますか」と問いかけていた。

「知りませんでした。知らされていませんでした」と正直に答えるしかない。(c) 日本を代表する機関である海外 経済協力基金は、計画によって環境が受ける影響や、地域の住 人が受ける影響を調査しようとすらしなかった。 (75 字) 「だれの犠牲の上に、だれが利益を得ているのか」について関心を持ってほしい、という三人の言葉はずいぶん控え目だったと思う。

–1990.4.20 天声人語から抜粋

2. **全訳**

論文を非常に多く書く研究者についての新しい調査結果を見ると、またも、誰を著者と呼ぶべきか否かという疑問を感じる。先週発表された調査結果によると、世界中で二十人の研究者が、過去十年間、少なくとも 11.3 日に一回は記事を出版している。トップの五人は、一週間に一回以上の割合で、記事を出している。

これらの著者の中には、結晶学者がいる。彼らは、高度に複雑な実験設備と経験を持っており、必然的に、彼らの助けを必要とする数多くの研究者と共同実験を行なっている。普通、その見返りとして、共著者の肩書をを得るのである。他のほとんどの学者は、中位か、大きな研究室もしくは研究グループを取りまとめている科学者で、そのグループが、専攻分野のなかでも、特に成果の多い一連の研究に行き当たったような人達である。(a) 最 も著作の多い二十人の専門分野は、単独の分野では、基礎分子化学が最も多く、次いで移植外科医学が目立った。 (52 字) より広く分野を捉えると、生命医学が全体の半分以上を占めた。

今までになく科学に厳密さが要求される今日、多くの学者が、「論文の著者」という昔ながらの問題について考え直している。反応の鍵となる試薬を貸すことは、共著者となるに足ることであろうか。では、よいアイディアを与えたというのは? 日常的な指導は? (b) 著名な研究者が、捏造データを含んでいることが明らかとなった論 文に、著者として名を連ねたばかりに、(本人はその研究をしなかったにもかかわらず)被害を被ったという事 件が起こるに至っては、「著者」についての論争は、もはやアカデミックという域をはずれている。 (125 字) 今日では、研究のてほどきや監督をする、研究室の指導者は、論文に共著者として名前を連ねる場合は、その論文のデータの正確さに対し責任を問われるのである。

多作著者のリストに載っている研究者の多くについての非公式な調査から、「著者」についての考え方は、十人十色であることがわかる。「著者」についての考え方は、専攻する分野によって違う傾向にある。化学実験は、比較的一本道であり、確認も自分で行なうことが多いので、論文をたくさん出している化学の研究室のリーダーによると、彼らは、普段研究室内の研究を見てまわっているのに加え、アイディアを与えたり、監督したりするだけのことも充分大切なことであると確信しており、(c) 結局、論文の共著者となるのである。 テキサス A&M 大学の化学者であるフランク=コットンによると、彼の研究室で行なわれる実験のほとんど

は、彼が選んだものであり、そして、彼が共著者となっている。というのも、彼が実験の許可を与えるのであり、彼の提案に基づいて実験は行なわれているからである。彼自身が実際の実験をやることはほとんどないが、彼は、研究室の 15 から 30 人の研究者を指導し、彼らのデータに目を通し、ほとんどすべての論文に手を入れているとのことである。一方で、ロンドン大学の病理学者であるジュリア=ポラックは、次のように言っている。「私は、そのアイディアが自分で思いついたものであるか、研究を始めたのが自分であるか、もしくは研究の重要な部分を自分が行なった場合でなければ、論文に名前を載せません。理解もしておらず、論文書きを一部でも行なっていない場合、その論文に名前が載るのはいやである、というのが、私の基準です。」

（d）論文の著者に関して、全分野に共通の確固とした決まりができることはないかもしれないが、論文を多作す る研究者も、今では、充分監督したわけでない研究の論文に自分の名前を載せることの危険性を知っているようだ 。(99 字)

3. **全訳**

私は、自分の気持ちを口を酸っぱくするほど言わずにはいられない。実験物理学者はいつも理論家の「提案」を受け入れてしまっている。しかし、現在の状況は馬鹿げている。今や、理論家は、巨大な粒子加速器の日程会議の席上で、非常にすぐれた実験家の出す提案に対し、拒否権を行使することができるのである。私が、原子核および素粒子物理で活動していたころは、理論家の拒否権の行使の仕方は、まだ、受け入れられるものであった。彼らは、「馬鹿な実験」をした人を誰でもいいから引き合いに出し、あざ笑ったのである。というわけで、もし、そのような社会的圧力により威嚇される人がいるとすれは、(実際にはほとんどの人が威嚇されてしまうのであるが. . .) 効果的に、馬鹿な実験を人がしなくすることができるのである。時々、馬鹿な実験だと気付かずに、馬鹿な実験をしてしまう実験家がいて、その馬鹿げた結果を論文にしてしまうのだが、そうすると、はるかに頭のいい理論家達に笑われてしまうのであった。典型的な例は、R.T.Cox が 1928 年に発見した実験結果である。それは、ラジウム E の β 崩壊によって、放出される電子は、(右と左で違う確率で「二重散乱」するので) 偏極する、というものである。理論家は、この結果を受け入れることが出来なかった。というのは、それは、彼らが神聖視していたパリティー保存則を侵していたからである。そのために、Cox の重要な発見は、「正しく」再発見されるまで視界から消え去ったのである。19 年後、T.F.Lee と Frank Yang が、素粒子物理の重大な問題を解決するために、もしかすると弱い相互作用ではパリティーが保存されないのではないかもしれない、ということを提案した。いくつかのグループがパリティーの非保存を確認する実験を設定し、すぐに、Lee と Yang の提案が、実際の世界の構造に適合したものであることが見い出された。しかしながら、この「常識」の変革に対するノーベル賞は、Cox が貰ったわけでも、Wu 夫人とその共同実験者達 (Lee と Yang が正しいことを証明した) が貰ったわけでもなかった。Lee と Yang が確かに栄冠を勝ち得たわけだが、私は、実験家もそれを分かつべきであったと思う。

来年は、Michelson-Morley の実験からちょうど百年である。あの非常に重要な実験も、今日のような状況では行なわれなかったであろう。というのも、次のような想像上の場面が展開されたであろうからだ。Michelson と Morley が「日程会議」で、Michelson の新しい干渉計を使って、エーテル中の地球の速度を測定する計画であることを報告する。会議に参加している理論天体物理学者が質問する。「あなた方の方法だと、どの程度の精度で、地球の速度が測れるのですか?」Michelson が言う。「有効数字一桁です。」理論家が応える。「しかし、エーテル中での地球の速度は、既に、天文観測から、有効数字 2, 3 桁で求められているんですよ。」会議の全員が、Michelson と Morley の提案が前代未聞のばかげたものであるということで一致し、2 人の案は、にべもなく却下されてしまう。という具合に、エーテルの概念を放棄するきっかけとなった実験も行なわれないことになってしまう。

かつての様に実験家がばかな実験をやらせてもらえるのなら、かつてパリティの保存やエーテルの存在が正しい ことをみんなが知っていたように、「みんなが正しいことを知っている」物理概念のいったいいくつが、実は間違い であると判明することかと思う。 (118 字)

(i) 全訳参照のこと。

(ii) Theoretical physicists always try to keep experimental physicists from doing experiments that seem to be stupid from what is “known” to be true. In the past, theorists held up to ridicule anyone who did “stupid experiments”, and by the social pressure, experimentalists were intimidated and kept from such experiments.

But still, it was possible to do such experiments accidentally by not knowing that it was stupid. And also, there were some “stupid experiments” which eventually revealed the falseness of a fact that everyone believed to be true. The present situation is ridiculous because theorists sit on the scheduling committees and can exercise veto power over the proposals by the experimentalists directly. But if the experimentalists were again allowed to do “stupid experiments”, they may reveal some of our physical misconception. （137 語）

4. Up to about twenty-five years ago, it was thought that protons were “elementary” particles, but the experiment in which protons collided with other protons or electrons at high speeds indicated that they were in fact made up of smaller particles. These particles were named quarks.

5. **(i)** By the time Achilles reaches the place where the turtle stayed at first, the turtle is proceeded ahead. When Achilles again reaches the point where the turtle were, he has gone further.

   (ii) The above statement neglected the convergence of the accumulated time that Achilles spent in each steps.

■ 教育 数学 解答

1. **(i)** $u = x^2 \dfrac{dy}{dx}$ として、もとの方程式を書き直すと、

$$\frac{du}{dx} = -x^2$$

となる。これと、$u(0) = 0$ から、

$$u = -\frac{x^3}{3} \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{3}$$

これを解いて、

$$y = 1 - \frac{x^2}{6}$$

(ii) まず、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{z}{x}\right) = -\frac{z}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(-z + x\frac{dz}{dx}\right) = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dx} + x\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{1}{x}\frac{d^2z}{dx^2}$$

よって、z に対する微分方程式は以下のようになる。

$$\frac{1}{x}\frac{d^2z}{dx^2} = -\left(\frac{z}{x}\right)^n$$

$n = 1$ のときは、

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -z$$

と表される。この一般解は、A, B を任意定数として、

$$z = Ae^{ix} + Be^{-ix} \qquad \therefore \quad y = \frac{z}{x} = \frac{1}{x}\left(Ae^{ix} + Be^{-ix}\right)$$

このうち初期条件を満たすものとして、

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

(iii) $y = (1 + ax^2)^m$ をもとの方程式に代入して、

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) &= \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(2amx^3(1+ax^2)^{m-1}\right)\\ &= (1+ax^2)^{m-2}\left(6am(1+ax^2) + 4a^2m(m-1)x^2\right)\\ &= -(1+ax^2)^{mn}\end{aligned}$$

が得られる。両辺 $(1 + ax^2)^{m-2}$ で割ると、

$$6am + (4m^2 + 2m)a^2x^2 = -(1 + ax^2)^{mn-m+2}$$

となる。$x = 0$ で等式が成り立つためには、

$$6am = -1 \qquad \cdots (1)$$

が必要である。これから、$a \neq 0, m \neq 0$ が必要であることが言える。
次に x^2 の項の係数が等しいことより、

$$a^2(4m^2 + 2m) = 0 \qquad \cdots (2)$$

$$mn - m + 2 = 0 \qquad \cdots (3)$$

または、

$$a^2(4m^2+2m) = -a \qquad \cdots (4)$$

$$mn - m + 2 = 1 \qquad \cdots (5)$$

がいえる。まず、(2),(3) について考えると、$a \neq 0, m \neq 0$ と (2) をあわせて、$m = -1/2$ がいえる。これと、(3),(1) から、$a = 1/3, n = 5$ となる。これは、確かにもとの方程式の解となっている。

次に、(4),(5) について考えると、(4),(1) から、$2m+1 = 3$、すなわち、$m = 1$ が言える。(1),(5) にこの結果を代入して、$a = -1/6, n = 0$ が得られるが、これは、$n \neq 0$ であることに反するので求める解ではない。

以上まとめて、$n = 5, m = -1/2, a = 1/3$ である。

(iv) 初期条件を満たす y の４次までの展開式として、

$$y = 1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + O(x^5)$$

をとる。これを方程式の左辺に代入して、

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) &= \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(2a_2x^3 + 3a_3x^4 + 4a_4x^5 + O(x^6)\right)\\ &= 6a_2 + 12a_3x + 20a_4x^2 + O(x^3)\end{aligned}$$

となる。これから、まず $a_2 = -1/6$ であることがわかる。また、右辺についての展開は、x^2 の項までとれば良く、

$$\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + O(x^3)\right)^n = 1 - \frac{n}{6}x^2 + O(x^3)$$

と左辺の展開を比べて、$a_3 = 0, a_4 = \dfrac{n}{120}$ が得られる。
以上まとめて、４次までの y の展開として、

$$y = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{n}{120}x^4 + \cdots$$

が得られる。

2. **(i)** 求める固有値を λ とすると、$\det(A - \lambda I) = 0$ である。

$$\begin{aligned}|A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}\\ &= -(1+\lambda)(1-\lambda)^2 - 8(1-\lambda)\\ &= (\lambda-1)(3-\lambda)(3+\lambda) = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \lambda = 3, -3, 1$$

•$\lambda = 3$ のとき、$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ より、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

•$\lambda = -3$ のとき、同様に、$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ より、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

•$\lambda = 1$ のとき、同様に、$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ より、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(ii) $A = TVT^{-1}, V = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ として、

$$\begin{aligned} A^3 + aA^2 + bA + cE &= TV^3T^{-1} + aTV^2T^{-1} + bTVT^{-1} + cE \\ &= T(V^3 + aV^2 + bV + cE)T^{-1} = 0 \end{aligned}$$

より、$V^3 + aV^2 + bV + cE = 0$ を解けばよい。

$$V^3 = \begin{pmatrix} 3^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .etc.$$

より、

$$\begin{cases} 27 & +9a & +3b & +c & = 0 \\ -27 & +9a & -3b & +c & = 0 \\ 1 & +a & +b & +c & = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad a = -1, b = -9, c = 9$$

よって、$A^3 - A^2 - 9A + 9E = 0$ である。(ケーリー・ハミルトンの定理より、当然固有方程式と同じ形になる)
これを用いて、

$$\begin{cases} A^5 & = & A^4 & +9A^3 & -9A^2 \\ A^4 & = & A^3 & +9A^2 & -9A \end{cases} \qquad \therefore \quad A^5 = 10A^3 - 9A$$

$$\begin{aligned} A^5 - 6A^3 - 4A^2 + 18E &= 4A^3 - 4A^2 - 9A + 18E \\ &= 4(A^2 + 9A - 9E) - 4A^2 - 9A + 18E \\ &= 27A - 18E = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 54 \\ 0 & 9 & 54 \\ 54 & 54 & -45 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(iii)

$$\vec{y} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$(A - E)\vec{y} = 2\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{（これが表現できる}\vec{x}\text{の一般形）}$$

よって上式で表せないのは、この 2 ベクトルの張る平面以外の成分を持つベクトルが足されたものである。よって、その一般形は、

$$\vec{y} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (u \neq 0)$$

3. **(i)** 恒等式 $(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta$ の左辺を展開すると、

$$\text{左辺} = \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta - 10i\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta$$

実部をとれば、

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta\\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta(1-\cos^2\theta)^2\\ &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta\end{aligned}$$

(ii) 上の式において、$\theta = \pi/5$ とすると、

$$\cos\pi = 16\cos^5\frac{\pi}{5} - 20\cos^3\frac{\pi}{5} + 5\cos\frac{\pi}{5}$$

となる。$\cos(\pi/5) = x$ とすれば、

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = 0$$
$$(x+1)(16x^4 - 16x^3 - 4x^2 + 4x + 1) = 0$$
$$(x+1)\left(4x^2 - 2x - 1\right)^2 = 0$$
$$(x+1)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 0$$
$$\therefore \quad x = -1, \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

ところで、$\theta = \frac{3}{5}\pi, \pi, \frac{7}{5}\pi, \frac{9}{5}\pi$ としても同じ方程式が得られることから、５つの解のうち、もっとも大きいものが、$\cos(\pi/5)$ であることがわかる。従って、

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

(iii) まず、図２の BC 面は、正５角形で、ちょうど図１の正５角形の部分に当たる。図１では、この正５角形の部分を BC より上にある正 20 面体の面 BC への正射影として見ることにする。図２の H が、図１では、ちょうど A の部分に当たる。この図を基本にして考える。

題意や、正 20 面体の対称性を考えれば、図２のようになることは明らかである。また、図のように各点に名前をつける。

まず、図１において CA の面 BC への正射影が CH になり、EA の面 BC への正射影が EH になる。

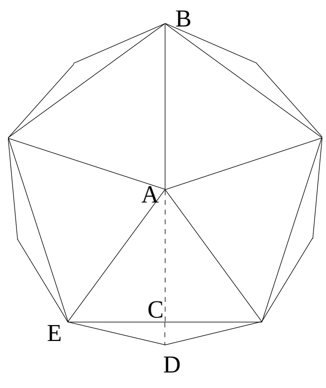


図１

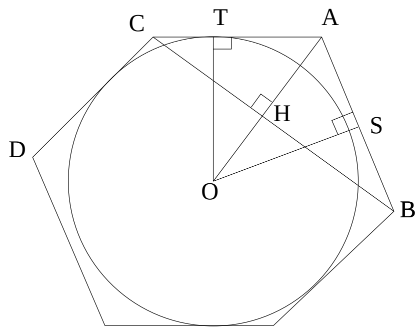


図２

$CE = \frac{a}{2}$ より

$$CH = CE\frac{1}{\tan\frac{\pi}{5}} = \frac{a}{2}\times\frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}$$

次に、図 2 で △ACH にピタゴラスの定理を用いると

$$AH^2 + CH^2 = AC^2$$

$$AH^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 \qquad \therefore \quad AH = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}a$$

ところで、図 2 で △ABH と △AOS は相似より

$$AO : AB = AS : AH$$

△ACH と △AOT は相似より

$$AO : AC = OT : CH$$

よって、

$$OT = \frac{AO \cdot CH}{AC} = \frac{AB \cdot AS \cdot CH}{AH \cdot AC} = a\frac{a}{2}\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}\frac{1}{a}\frac{2}{\sqrt{3}a} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}a \qquad \cdots (6)$$

よって、内接球の半径 $r = OT$ は

$$r = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}a$$

また図 2 で再び △ACH と △AOT が相似であることに注目すると

$$AT : TO = AH : HC \qquad \therefore \quad AT = \frac{TO \cdot AH}{HC}$$

(6) より

$$r = TO = \frac{AB \cdot AS \cdot CH}{AH \cdot AC}$$

であるから

$$AT = \frac{AB \cdot AS}{AC} = a\frac{a}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{a} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}AC$$

したがって T、すなわち内接点は AC を 2 : 1 に内分する点、すなわち正三角形の面の重心である。

(iv) 正 20 面体はその対称性から、正三角形を底面とし、高さを内接球の半径とする三角錐が 20 個あつまったもの、と考えられる。三角錐の体積 v は

$$v = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}a = \frac{3+\sqrt{5}}{48}a^3$$

したがって正 20 面体の体積 V は

$$V = 20v = \frac{15+5\sqrt{5}}{12}a^3$$

と求まる。

■ 教育 物理 解答

1. **(i)** $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ を時間微分すると

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k} + A_x\frac{d\vec{i}}{dt} + A_y\frac{d\vec{j}}{dt} + A_z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

これを与えられた式

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k} + \vec{\omega}\times\vec{A}$$

と比べて

$$A_x\frac{d\vec{i}}{dt} + A_y\frac{d\vec{j}}{dt} + A_z\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{A} \qquad \cdots (1)$$

を得る。ここで $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ に対して

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + \vec{\omega}\times\vec{r} \qquad \cdots (2)$$

さらに時間微分を行って

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + \dot{x}\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{k}}{dt} + \vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}$$

ただし $\vec{n}$ は定ベクトルなので $\dot{\vec{\omega}} = \omega\dot{\vec{n}} = 0$ を用いた。 (1),(2) を代入して

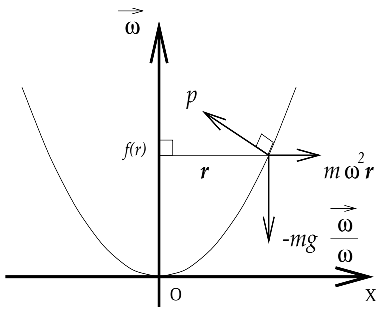
$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a} + 2\vec{\omega}\times\vec{v} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

ただし $\vec{a} \equiv \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$ 、$\vec{v} \equiv \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$ はそれぞれ回転座標系における加速度および速度にあたる。
外力 $\vec{F}$ は $m\ddot{\vec{r}}$ に等しいから

$$m\vec{a} = \vec{F} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

第 2 項がコリオリ力、第 3 項が遠心力に対応する。

(ii) 水面が安定する条件を考える。水面付近の水にその水面と垂直でない成分を持つ力が働くと、そこの水はその方向に動いてしまうと考えられる。よって水面が安定するにはその水面に対し垂直な力のみが働く時になる。そして、これが圧力 $\vec{P}$ によって支えられている。図のように水面の水の位置ベクトルを回転の中心軸から $\vec{\omega}$ に垂直にとる。また水面の高さを $f(x)$ であらわすと



$$0 = -mg\frac{\vec{\omega}}{\omega} + \vec{P} + m\vec{\omega}^2\vec{r}$$

$\vec{\omega}/\omega$ と $\vec{r}/r$ を成分で表すと

$$0 = -mg + P\frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \qquad \cdots (3)$$

$$0 = -P\frac{f'(r)}{\sqrt{1+f'(r)^2}} + m\omega^2 r \qquad \cdots (4)$$

P を消去して

$$f'(r) = \frac{\omega^2}{g}r$$

積分して

$$f(r) = \frac{\omega^2}{2g}r^2 + C_0$$

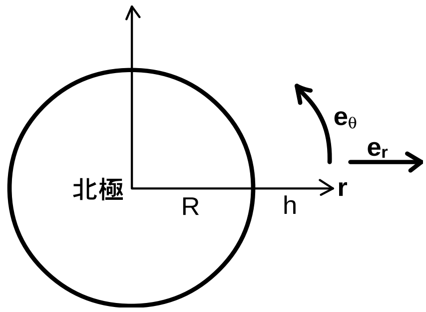
但し C_0 は定数である。
以上より水面は放物線になることがわかる。

(iii) 回転座標系を円柱座標で表す。

$$\vec{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \quad \vec{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \quad \vec{e}_z = (0, 0, 1)$$

であるから

$$\dot{\vec{e}}_r = \vec{e}_\theta\dot{\theta}, \quad \dot{\vec{e}}_\theta = -\vec{e}_r\dot{\theta}, \quad \dot{\vec{e}}_z = \vec{0}$$



となる。よって $\vec{r} = r\vec{e}_r$ を時間微分すると

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{\vec{r}} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

図のように座標系をとると

$$m\vec{a} = -mg\vec{e}_r - 2m\vec{\omega}\times\vec{v} + m\omega^2 r\vec{e}_r$$

$\vec{a} \Rightarrow \ddot{\vec{r}}$、 $\vec{v} \Rightarrow \dot{\vec{r}}$ と置き換えて $\vec{e}_r$ 成分と $\vec{e}_\theta$ 成分に分けると

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -g + \omega^2 r + 2\omega r\dot{\theta}$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -2\omega\dot{r}$$

ただしコリオリ力 F は

$$F = -2m\vec{\omega}\times\vec{v} = -2m\omega\vec{e}_z \times \left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right) = -2m\omega\left(\dot{r}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}\vec{e}_r\right)$$

と計算した。 $\vec{e}_\theta$ 成分の式は

$$r\frac{d\dot{\theta}}{dt} = -2\frac{dr}{dt}\left(\dot{\theta} + \omega\right) \quad \leftrightarrow \quad \frac{d\ln\left(\dot{\theta} + \omega\right)}{dt} = -2\frac{d\ln r}{dt} \quad \leftrightarrow \left(\dot{\theta} + \omega\right) = \frac{C}{r^2}$$

と積分ができ、初期条件 $\dot{\theta} = 0$, $r = R + h$ を代入して

$$\dot{\theta} = \omega\left(\frac{(R+h)^2}{r^2} - 1\right) \qquad \cdots (5)$$

ここで r は $R + h \sim R$ の値をとり $R \gg h$ を考えると $\dot{\theta}$ は ω ぐらいかそれよりも小さい値をとる。よって運動方程式の $\vec{e}_r$ 成分は

$$\ddot{r} = -g\left(1 + O\left(\frac{\omega^2 R}{g}\right)\right)$$

となる。実際に地球の自転、半径を入れて見ると

$$\frac{\omega^2 R}{g} = \left(\frac{2\pi}{24\times 60\times 60}\right)^2 \frac{6.4\times 10^6}{9.8} \sim 0.003$$

この項は微小になり無視できる。 $\dot{r}(t = 0) = 0$, $r(t = 0) = R + h$ であるから

$$r = (R+h) - \frac{gt^2}{2}$$

これを式 (5) に代入して

$$\dot{\theta} = \omega\left\{\frac{(R+h)^2}{((R+h) - gt^2/2)^2} - 1\right\} = \omega\left\{\frac{1}{(1 - gt^2/2\,(R+h))^2} - 1\right\} \simeq \omega\left(1 + \frac{gt^2}{R+h} - 1\right) = \frac{\omega g t^2}{R+h}$$

これを積分して

$$\theta = \frac{\omega g t^3}{3\,(R+h)}$$

質点が落下する ($r = R + h \ \rightarrow\ r = R$) のに要する時間は $r = (R+h) - \frac{gt^2}{2}$ より $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ この間 θ は $\theta = 0$ から

$$\theta = \frac{\omega g}{3\,(R+h)}\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^3$$

だけずれる。これは地表面では ($h/R \ll 1$)

$$\frac{\omega g}{3}\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^3 \frac{R}{R+h} \simeq \frac{\omega g}{3}\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^3$$

$h = 490\mathrm{m}$ の場合

$$\frac{2\pi}{24\times 60\times 60}\frac{9.8}{3}\left(\sqrt{\frac{2\times 490}{9.8}}\right)^3 = 24\mathrm{cm}$$

(iv) 地上に達するまでには $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ かかる。初速度が $h\omega$ ならばこの間に $h\omega t = h\omega\sqrt{\frac{2h}{g}}$ だけ進む。これは明らかに **(iii)** の答え

$$\frac{\omega g}{3}\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^3 = \frac{2}{3}h\omega\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

と異なる。この考察に地球の回転が質点が発射された瞬間においてのみ加味されているからである。つまり質点の相対速度は高さ x(m) の時 $x\omega$ であるのだからずれる距離は $\int_{x=h}^{x=0} x\omega dt$ で与えられる。これに $x = h - \frac{gt^2}{2}$ を代入すれば

$$\int_{t=0}^{t=\sqrt{2h/g}}\left(h - \frac{gt^2}{2}\right)\omega dt = \omega[ht - \frac{gt^3}{6}]_{t=0}^{t=\sqrt{2h/g}} = \frac{2}{3}\omega h\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

と答えは一致する。

2. **(i)** 極板間の電場と電位差は、ガウスの法則より

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0\pi a^2}, V = \frac{Qd}{\varepsilon_0\pi a^2}$$

よって、$Q = CV$ より

$$C = \varepsilon_0\frac{\pi a^2}{d}$$

よって、電磁場のエネルギーは

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\pi a^2 d = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0\pi a^2} = \frac{Q^2}{2C}$$

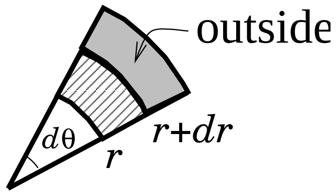
(ii) 極板間には電位差 $V = Q/C$ があるのでこれによって針金には電流が流れる。よって

$$I(t) = \frac{V}{R} = \frac{q(t)}{RC}$$

$I(t)$ は極板上の電荷が減少して針金に流れ込む事によって流れるのだから $I(t) = -dq(t)/dt$ 。よって

$$-\frac{dq}{dt} = \frac{q(t)}{RC} \Rightarrow q(t) = q(0)\exp(-t/RC)$$
$$\Leftrightarrow I(t) = \frac{q(0)}{RC}\exp(-t/RC)$$

(iii) 極板上の電荷は一様に減って中心の針金に流れるのであるから、その流れは中心に向かっていて、中心に対して対称のはずである。そこで半径 $r(<a)$ の点における弧に対する電流線密度を $\vec{i}(r)$ とする。時間 dt に図の部分から中心に向かう電荷はその定義により $i(r)\cdot rd\theta\cdot dt$ となる。これはその外側の部分から $i(r+dr)\cdot(r+dr)d\theta\cdot dt$ だけ、また斜線部から電荷が減少することによって $-dq(t)/\pi a^2\times rd\theta dr$ だけ供給される。よって



$$i(r)rd\theta dt = i(r+dr)\cdot(r+dr)rd\theta\cdot dt - dq(t)/\pi a^2\cdot rd\theta dr$$

$-dq(t)=I(t)dt$ に注意して

$$\leftrightarrow \frac{i(r+dr)\cdot(r+dr)-i(r)r}{dr} = -\frac{I(t)r}{\pi a^2} \leftrightarrow \frac{d}{dr}i(r)\cdot r = -\frac{I(t)r}{\pi a^2} \leftrightarrow i(r)dr = -\frac{I(t)r^2}{2\pi a^2}+C$$

極板の周辺 $(r=a)$ では電流供給源が無いから $\vec{i}(r=a)=0$ のはず。

$$i(a)\cdot a = -\frac{I(t)a^2}{2\pi a^2}+C=0 \leftrightarrow C=\frac{I(t)}{2\pi}$$

これより

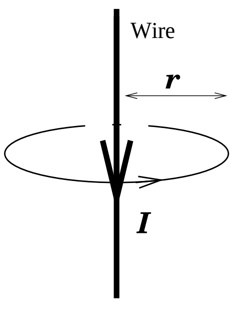
$$i(r)=\frac{I(t)}{2\pi r}\left(1-(r/a)^2\right)$$

これは境界条件 $i\cdot 2\pi r = I(t)(r\to 0)$ も満たす。このことは極板上の電流は全て $r\to 0$ でまとまっていて $I(t)$ となって針金を流れると言うことをいっている。
変位電流は極板間の電束密度の減少を説明するもので

$$\frac{\partial D}{\partial t}=i_e \leftrightarrow i_e = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\frac{V(t)}{d}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0\frac{R}{d}I(t)=\frac{\varepsilon_0}{Cd}I(t)=\frac{I(t)}{\pi a^2}$$

ただし $C=\varepsilon_0\pi a^2/d$ としている。実際 $\vec{D}$ の減少は $I(t)$ によるもので、この減少が一様におきているならば電流密度が一様に $I(t)/\pi a^2$ と分布していて、これが原因と考えられるので $O.K.$

(iv)



その対称性により磁場の極板に平行な成分は極板との距離によらず円周方向成分のみを持つ。そこで左の図のような経路に対して

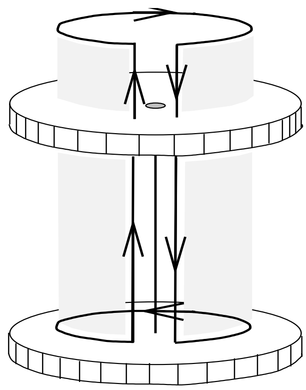
$$\nabla\times\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{i}_e$$

を表面積分すると

$$\int\vec{H}d\vec{s}-\frac{\partial}{\partial t}\int\vec{D}d\vec{s}=\int\vec{i}d\vec{s}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} H(r)2\pi r - \frac{I}{\pi a^2}\pi r^2 = -I & (r\le a) \\ H(r)2\pi r - \frac{I}{\pi a^2}\pi a^2 = -I & (r>a) \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} H(r) = -\frac{I}{2\pi r}\left(1-(r/a)^2\right) = -i(r) & (r\le a) \\ H(r)=0 & (r>a) \end{cases}$$



これは右の図の経路を使っても求められる。この場合、この経路によって囲まれた面に垂直な $\vec{D}$ 成分は無いので

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{i}_e$$

面に流れ込んで来るのは極板上の電流線密度である。よってこの表面積分は

- $r \geq a$ の時

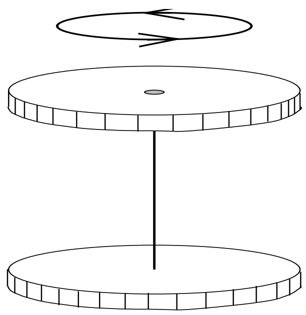
$$H_{in} \cdot 2\pi r - H_{ex} \cdot 2\pi r = \vec{i} \cdot 2\pi r$$

$$H_{in}(r) = \vec{i} + H_{ex}(r)$$

- $r < a$ の時

$$H_{in} \cdot 2\pi r = H_{ex} \cdot 2\pi r = 0$$

$$H_{in}(r) = H_{ex}(r)$$



極板の上で表面積分を上の図のように行えば

$$H_{ex} \cdot 2\pi r = 0 \leftrightarrow H_{ex} = 0$$

よって

$$H_{in}(r) = \begin{cases} -i & (r \leq a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

と同様の事が導かれる。
コンデンサーの外側で磁場が無いのは前者の解法によれば針金を流れる電流が作る磁場を電束密度が変化する事により生じる磁場がちょうど打ち消すためである。この電束密度の変化は極板上の電荷が減少するためであり、言葉を変えると、極板を流れる電流のためと言える。つまり、外側で磁場が無いのは針金の電流が作る磁場を極板を流れる電流が打ち消すためであると言える。

(v) 電磁場のエネルギーの流れは Poynting Vector

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

から求められる。 $\vec{E}$ が極板 Q から極板 $-Q$ 向きへ、 $\vec{H}$ が極板 Q から見て右周りであるから $\vec{S}$ は針金に向かう。 $\vec{H}$ と $\vec{E}$ とは交わっているから

$$S = \frac{V}{d}\frac{I}{2\pi r}\left(1-(r/a)^2\right) = \frac{RI^2}{2\pi rd}\left(1-(r/a)^2\right)$$

針金に吸い込まれて行くエネルギーは針金の半径を $\rho \gg a$ として

$$S_\rho \cdot 2\pi\rho d = \frac{RI^2}{2\pi\rho d}\left(1-(\rho/a)^2\right)2\pi\rho d = RI^2 \ \ (\rho/a \gg 1)$$

また Joule 熱は $VI = RI^2$ となるから、と一致しており、電磁場のエネルギーが針金で Joule 熱になっているといえる。

3. 理想気体では、$dU = C_V dT$ であり、等温過程では $dU = 0$ でるから、熱力学第一法則より、$d'Q = pdV$
ここで、１モルの理想気体の状態方程式 $pV = RT$ から、p を消去して整理すると、

$$\frac{d'Q}{T} = R\frac{dV}{V}$$

したがって、$1 \to 2$ に対するエントロピーの変化は次のようになる。

$$\Delta S_{12} = \int \frac{d'Q}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RdV}{V} = R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

断熱膨張過程では、$d'Q = 0$ であるから、

$$\int \frac{d'Q}{T} = 0$$

断熱自由膨張過程が準静的であるとすると、これが $1 \to 2$ に対するエントロピー変化を与えることになる。しかし、準静的な変化であれば、過程によらず同じエントロピー変化が得られるはずである。したがって **(i)** との比較から、断熱自由膨張過程が準静的でないことがわかる。

(ii) 準静的断熱過程では $dQ' = 0$ であるから、熱力学第一法則より $C_V dT + pdV = 0$ が成り立つ。

ここで状態方程式より、$pV = RT$ から、p を消去して整理すると、

$$\frac{dV}{T} + \frac{R}{C_V}\frac{dV}{V} = 0$$

両辺積分して整理すると、$TV^{\frac{R}{C_V}} = const.$ となる。

さて、マイヤーの法則 $C_P = C_V + R$ を変形して、

$$\frac{R}{C_V} = \gamma - 1$$

したがって、$TV^{\gamma-1} = const.$。また、状態方程式より T を消去すると、$pV^{\gamma} = const.$。

これより、$p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_4^{\gamma}$ よって、$V_4 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma}$

(iii) $1 \to 4$:

断熱過程であることから $dQ' = 0$。よって、$\Delta S_{12} = 0$。

$4 \to 3$:

理想気体では $dU = C_V dT$ であり、$p = p_2$ の等圧過程であるかことから、

$$d'Q = C_V dT + p_2 dV$$

ここで、状態方程式 $p_2 V = RT$ の微分から、$p_2 dV = RdT$ なので、

$$d'Q = \frac{C_V}{R} p_2 dV + p_2 dV$$

マイヤーの関係式を使えば、

$$d'Q = \frac{C_P}{p_2} dV$$

また、状態方程式から p_2 を消去すれば、

$$d'Q = \frac{C_P}{R}\frac{RT}{V} dV \Longleftrightarrow \frac{d'Q}{T} = C_P \frac{dV}{V}$$

よって、この過程におけるエントロピー変化は、

$$\Delta S_{43} = \int \frac{d'Q}{T} = \int_{V_4}^{V_1} C_P \frac{dV}{V} = C_P \ln \frac{V_1}{V_4}$$

$3 \to 1$:

熱力学第一法則より、$d'Q = C_V dT$。状態方程式を微分した式をもちいれば、

$$dT = \frac{V_1}{R} dp = T \frac{dp}{p}$$

したがって、

$$d'Q = C_V T \frac{dp}{p} \iff \frac{d'Q}{T} = C_V \frac{dp}{p}$$

よってこの過程におけるエントロピー変化は

$$\Delta S_{31} = \int \frac{d'Q}{T} = \int_{p_2}^{p_1} C_V \frac{dp}{p} = C_V \ln \frac{p_1}{p_2}$$

以上より、循環過程 $1 \to 4 \to 3 \to 1$ におけるエントロピー変化は、

$$\Delta S_{14} + \Delta S_{43} + \Delta S_{31} = C_P \ln \frac{V_1}{V_4} + C_V \ln \frac{p_1}{p_2}$$

このエントロピー変化は 0 になるはずなので、

$$V_4 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{C_V}{C_P}}$$