# 1992年度　入学試験 一般教育科目（英語なし）

## ■ 教育 数学

1. 関数 $y(x)$ に対する次の常微分方程式について以下の設問に答えよ。

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) = -y^n$$

ただし、$y(0) = 1, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$ とする。

**(i)** $n = 0$ の場合の解を求めよ。

**(ii)** $y = \frac{z}{x}$ とおいて、$z$ に対する微分方程式を導き、$n = 1$ の場合の解を求めよ。

**(iii)** $n = 0, n = 1$ の場合のほかに、ある整数 $n$ に対して次の形の解

$$y = (1 + ax^2)^m$$

が存在することが知られている。その整数 $n$ と、定数 $m$、$a$ を求めよ。

**(iv)** $x = 0$ の近傍の解を $x$ に関するべき級数に展開し、$x^4$ の項まで求めよ。

2. 3 行 3 列の行列に関して以下の設問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

**(i)** $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

**(ii)** 行列に関する方程式

$$A^3 + aA^2 + bA + cE = 0$$

の係数 a,b,c を求めよ。但し $E$ は３行３列の単位行列、０ は零行列である。この結果を用いて行列

$$A^5 - 6A^3 - 4A^2 + 18E$$

を計算せよ。

**(iii)** ３次元ベクトル空間 $R^3$ のベクトル $\vec{x}$ で、$R^3$ のあるベクトル $\vec{y}$ を用いて

$$\vec{x} = (A - E)\vec{y}$$

と表すことのできないものの一般形を求めよ。

3. 1 辺の長さ a の正三角形で構成される正 20 面体の体積を以下の手順に従って求めよ。図 1 は、正 20 面体を一つの頂点 A と中心 O を通る直線の方向から見た時の平面図であり、図 2 は、その直線と一辺 AB を含む平面で切った時の断面図である。なお断面図には正 20 面体の内接球も破線で示してある。

**(i)** 恒等式 $(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta$ を利用して、$\cos 5\theta$ を $\cos\theta$ の多項式で表せ。ただし $i$ は虚数単位である。

**(ii)** 上の結果を利用して、$\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ の値を求めよ。

**(iii)** 正 20 面体に内接する球の半径を求めよ。また内接点はどの様な点であるか。

**(iv)** 正 20 面体の体積を求めよ。

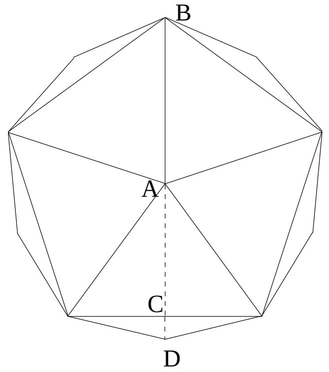



図 1

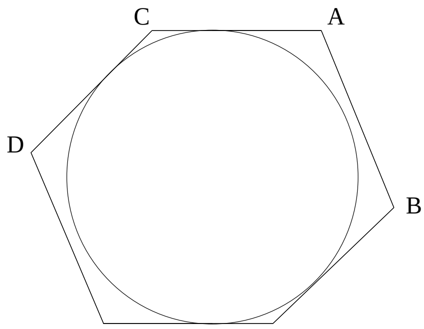



図 2

# ■ 教育 物理

1. **(i)** 単位ベクトル $\vec{n}$ を軸として角速度 $\omega$ で回転している座標系の直交底ベクトルを $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ とするとき，ベクトル

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

の時間変化が

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k} + \vec{\omega} \times \vec{A},\ \vec{\omega} = \omega\vec{n}$$

となることを用いて，一定の角速度 $\omega$ で回転する座標系における Newton の運動方程式を導き，遠心力とコリオリの力を求めよ。

**(ii)** バケツの水を鉛直線のまわりに一定の角速度 $\omega$ で回転させるとき，水面は遠心力によって放物線となることを示せ。ただし重力加速度を $g$ とせよ。

**(iii)** 赤道上で，高さ $h$ の所から初速ゼロで地面に落下する質点はコリオリの力でどれだけずれるか。$h = 490\text{m}$ のときのずれの大きさはどれ程か。簡単のため空気の抵抗は無視できるものとする。

**(iv)** A 君は **(iii)** の問題をコリオリの力を使わないで次のように考えた。地球の半径を $R$，自転の角速度を $\omega$ とすると，慣性系で見た時 $h$ 上空の質点の水平速度は $(R+h)\omega$，地面の水平速度は $R\omega$ だから，結局高さ $h$ の点から水平初速度 $h\omega$ で発射された質点が放物線を描いて地上に到達するまでの水平距離に等しいと考えた。その距離を求めよ。しかしこの距離はコリオリの力を用いた **(iii)** の結果と一致しない。その理由を考察せよ。

2. 半径 $a$ の金属円板２枚を間隔 $d$ で平行に向かい合わせて平行板コンデンサーを作り，上下の極板にそれぞれ $\pm Q$ の電荷を帯電させた。$d \ll a$ とし，円板の縁の電場の乱れは無視できるものとする。

**(i)** 平行板コンデンサーの静電容量 $C$ を求め，極板間の電場のエネルギーが $Q^2/(2C)$ に等しいことを示せ。

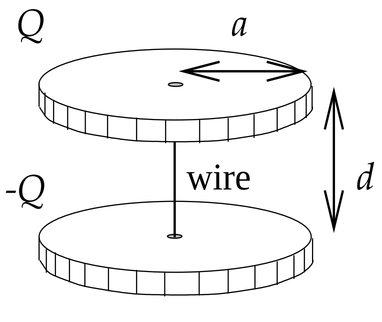
時刻 $t = 0$ で，両極板間の中心を電気抵抗 $R$ のまっすぐな針金（半径は $a$ に比べて十分小さい）で，図１のようにつないだ。$R$ は十分大きく，極板間の電荷分布は常に一様で，自己インダクタンスの効果は無視できるものとする。また，中心を通る針金からの距離を $r$ とする。

**(ii)** 時刻 $t$ における極板の電荷 $q(t)$ 及び針金を流れる電流 $I(t)$ を求めよ。（答えは $C$ を含む形で表せ）

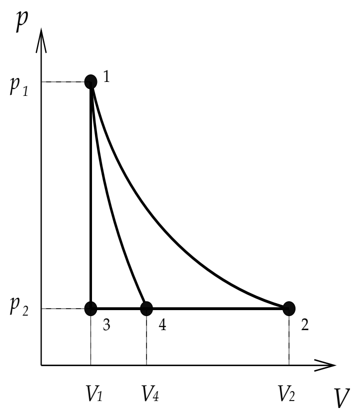
**(iii)** 時刻 $t$ で極板を流れる電流密度を $r$ の関数として求めよ。また，変位電流はどうなるか。（答えは $I(t)$ を含む形で表せ）

**(iv)** 時刻 $t$ で極板の間に生じる磁場の極板に平行な成分を $r$ の関数として求めよ。また，コンデンサーの外側ではどうなるか，極板を流れる電流と関係づけて述べよ。

**(v)** 電磁場のエネルギーの流れを求め，針金に吸い込まれていくエネルギーとジュール熱を比較せよ。




3. １モルの理想気体に対して，体積 $V$ と圧力 $p$ の平面上で，図２のような状態変化を考える。$1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 1$ は，それぞれ，準静的等温過程，準静的等圧過程，準静的等積過程であるとして次の問に答えよ。




**(i)** $1 \to 2$ に対するエントロピー変化 $\Delta S_{12}$ はいくらか．体積 $V_1, V_2$ 及び気体定数 $R$ を用いて表せ。

**(ii)** １から２へ断熱的自由膨張で移ったとするとき，$\int d'Q/T$ を求めよ。但し，$T$ は温度，$Q$ は熱量である。この結果を前問の $\Delta S_{12}$ と比較することにより何がわかるかを説明せよ。

**(iii)** １から始まる準静的断熱過程により，２と３を結ぶ直線上の４に到達したとする。準静的断熱過程では $TV^{\gamma-1}$ が一定であることを示せ。但し，$\gamma$ は定圧モル比熱と定積モル比熱の比である。これを用いて，$V_4$ の表式を $V_1, p_1, p_2$ の関数として求めよ。

**(iv)** $1 \to 4, 4 \to 3, 3 \to 1$ に対するエントロピー変化をそれぞれ計算せよ。循環過程 $1 \to 4 \to 3 \to 1$ におけるエントロピー変化はいくらになるはずか。これを用いて，前問と同じ $V_4$ の表式を求めよ。

# ■ 教育 数学 解答

1. **(i)** $u = x^2 \dfrac{dy}{dx}$ として、もとの方程式を書き直すと、

$$\frac{du}{dx} = -x^2$$

となる。これと、$u(0) = 0$ から、

$$u = -\frac{x^3}{3} \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{3}$$

これを解いて、

$$y = 1 - \frac{x^2}{6}$$

**(ii)** まず、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{z}{x}\right) = -\frac{z}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(-z + x\frac{dz}{dx}\right) = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dx} + x\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{1}{x}\frac{d^2z}{dx^2}$$

よって、$z$ に対する微分方程式は以下のようになる。

$$\frac{1}{x}\frac{d^2z}{dx^2} = -\left(\frac{z}{x}\right)^n$$

$n = 1$ のときは、

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -z$$

と表される。この一般解は、$A, B$ を任意定数として、

$$z = Ae^{ix} + Be^{-ix} \qquad \therefore \quad y = \frac{z}{x} = \frac{1}{x}\left(Ae^{ix} + Be^{-ix}\right)$$

このうち初期条件を満たすものとして、

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

**(iii)** $y = (1 + ax^2)^m$ をもとの方程式に代入して、

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) &= \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(2amx^3(1+ax^2)^{m-1}\right)\\ &= (1+ax^2)^{m-2}\left(6am(1+ax^2) + 4a^2m(m-1)x^2\right)\\ &= -(1+ax^2)^{mn}\end{aligned}$$

が得られる。両辺 $(1 + ax^2)^{m-2}$ で割ると、

$$6am + (4m^2 + 2m)a^2x^2 = -(1 + ax^2)^{mn-m+2}$$

となる。$x = 0$ で等式が成り立つためには、

$$6am = -1 \qquad \cdots (1)$$

が必要である。これから、$a \neq 0, m \neq 0$ が必要であることが言える。

次に $x^2$ の項の係数が等しいことより、

$$a^2(4m^2 + 2m) = 0 \qquad \cdots (2)$$

$$mn - m + 2 = 0 \qquad \cdots (3)$$

または、

$$a^2(4m^2+2m)=-a \qquad \cdots (4)$$

$$mn-m+2=1 \qquad \cdots (5)$$

がいえる。まず、(2),(3) について考えると、$a \neq 0, m \neq 0$ と (2) をあわせて、$m=-1/2$ がいえる。これと、(3),(1) から、$a=1/3, n=5$ となる。これは、確かにもとの方程式の解となっている。

次に、(4),(5) について考えると、(4),(1) から、$2m+1=3$、すなわち、$m=1$ が言える。(1),(5) にこの結果を代入して、$a=-1/6, n=0$ が得られるが、これは、$n \neq 0$ であることに反するので求める解ではない。

以上まとめて、$n=5, m=-1/2, a=1/3$ である。

**(iv)** 初期条件を満たす $y$ の４次までの展開式として、

$$y=1+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+O(x^5)$$

をとる。これを方程式の左辺に代入して、

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) &= \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(2a_2x^3+3a_3x^4+4a_4x^5+O(x^6)\right)\\ &= 6a_2+12a_3x+20a_4x^2+O(x^3)\end{aligned}$$

となる。これから、まず $a_2=-1/6$ であることがわかる。また、右辺についての展開は、$x^2$ の項までとれば良く、

$$\left(1-\frac{1}{6}x^2+O(x^3)\right)^n = 1-\frac{n}{6}x^2+O(x^3)$$

と左辺の展開を比べて、$a_3=0, a_4=\dfrac{n}{120}$ が得られる。
以上まとめて、４次までの $y$ の展開として、

$$y=1-\frac{1}{6}x^2+\frac{n}{120}x^4+\cdots$$

が得られる。

2. **(i)** 求める固有値を $\lambda$ とすると、$\det(A-\lambda I)=0$ である。

$$\begin{aligned}|A-\lambda I| &= \begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 2\\ 0 & 1-\lambda & 2\\ 2 & 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}\\ &= -(1+\lambda)(1-\lambda)^2-8(1-\lambda)\\ &= (\lambda-1)(3-\lambda)(3+\lambda)=0\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \lambda=3,-3,1$$

•$\lambda=3$ のとき、$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ より、$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

•$\lambda=-3$ のとき、同様に、$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ より、$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

•$\lambda=1$ のとき、同様に、$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ より、$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

**(ii)** $A = TVT^{-1}, V = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ として、

$$\begin{aligned} A^3 + aA^2 + bA + cE &= TV^3T^{-1} + aTV^2T^{-1} + bTVT^{-1} + cE \\ &= T(V^3 + aV^2 + bV + cE)T^{-1} = 0 \end{aligned}$$

より、$V^3 + aV^2 + bV + cE = 0$ を解けばよい。

$$V^3 = \begin{pmatrix} 3^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .etc.$$

より、

$$\begin{cases} 27 & +9a & +3b & +c & = 0 \\ -27 & +9a & -3b & +c & = 0 \\ 1 & +a & +b & +c & = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad a = -1, b = -9, c = 9$$

よって、$A^3 - A^2 - 9A + 9E = 0$ である。(ケーリー・ハミルトンの定理より、当然固有方程式と同じ形になる)
これを用いて、

$$\begin{cases} A^5 & = & A^4 & +9A^3 & -9A^2 \\ A^4 & = & A^3 & +9A^2 & -9A \end{cases} \qquad \therefore \quad A^5 = 10A^3 - 9A$$

$$\begin{aligned} A^5 - 6A^3 - 4A^2 + 18E &= 4A^3 - 4A^2 - 9A + 18E \\ &= 4(A^2 + 9A - 9E) - 4A^2 - 9A + 18E \\ &= 27A - 18E = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 54 \\ 0 & 9 & 54 \\ 54 & 54 & -45 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**(iii)**

$$\vec{y} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$(A - E)\vec{y} = 2\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$（これが表現できる$\vec{x}$の一般形）

よって上式で表せないのは、この 2 ベクトルの張る平面以外の成分を持つベクトルが足されたものである。よって、その一般形は、

$$\vec{y} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (u \neq 0)$$

3. **(i)** 恒等式 $(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta$ の左辺を展開すると、

$$\text{左辺} = \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta - 10i\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta$$

実部をとれば、

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta \\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta(1-\cos^2\theta)^2 \\ &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta\end{aligned}$$

**(ii)** 上の式において、$\theta = \pi/5$ とすると、

$$\cos\pi = 16\cos^5\frac{\pi}{5} - 20\cos^3\frac{\pi}{5} + 5\cos\frac{\pi}{5}$$

となる。$\cos(\pi/5) = x$ とすれば、

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = 0$$
$$(x+1)(16x^4 - 16x^3 - 4x^2 + 4x + 1) = 0$$
$$(x+1)\left(4x^2 - 2x - 1\right)^2 = 0$$
$$(x+1)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 0$$
$$\therefore\quad x = -1, \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

ところで、$\theta = \frac{3}{5}\pi, \pi, \frac{7}{5}\pi, \frac{9}{5}\pi$ としても同じ方程式が得られることから、５つの解のうち、もっとも大きいものが、$\cos(\pi/5)$ であることがわかる。従って、

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

**(iii)** まず、図２の BC 面は、正５角形で、ちょうど図１の正５角形の部分に当たる。図１では、この正５角形の部分を BC より上にある正 20 面体の面 BC への正射影として見ることにする。図２の H が、図１では、ちょうど A の部分に当たる。この図を基本にして考える。

題意や、正 20 面体の対称性を考えれば、図２のようになることは明らかである。また、図のように各点に名前をつける。

まず、図１において CA の面 BC への正射影が CH になり、EA の面 BC への正射影が EH になる。

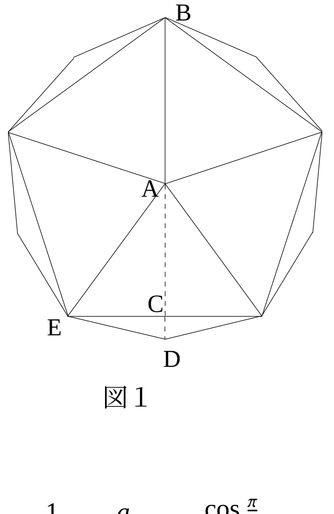



図１

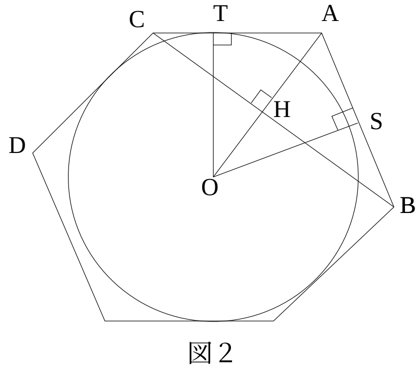



図２

$CE = \frac{a}{2}$ より

$$CH = CE\frac{1}{\tan\frac{\pi}{5}} = \frac{a}{2}\times\frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}$$

次に、図 2 で △ACH にピタゴラスの定理を用いると

$$AH^2 + CH^2 = AC^2$$

$$AH^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 \qquad \therefore \quad AH = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}a$$

ところで、図 2 で △ABH と △AOS は相似より

$$AO : AB = AS : AH$$

△ACH と △AOT は相似より

$$AO : AC = OT : CH$$

よって、

$$OT = \frac{AO \cdot CH}{AC} = \frac{AB \cdot AS \cdot CH}{AH \cdot AC} = a\frac{a}{2}\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}\frac{1}{a}\frac{2}{\sqrt{3}a} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}a \qquad \cdots (6)$$

よって、内接球の半径 $r = OT$ は

$$r = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}a$$

また図 2 で再び △ACH と △AOT が相似であることに注目すると

$$AT : TO = AH : HC \qquad \therefore \quad AT = \frac{TO \cdot AH}{HC}$$

(6) より

$$r = TO = \frac{AB \cdot AS \cdot CH}{AH \cdot AC}$$

であるから

$$AT = \frac{AB \cdot AS}{AC} = a\frac{a}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{a} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}AC$$

したがって $T$、すなわち内接点は $AC$ を 2 : 1 に内分する点、すなわち正三角形の面の重心である。

**(iv)** 正 20 面体はその対称性から、正三角形を底面とし、高さを内接球の半径とする三角錐が 20 個あつまったもの、と考えられる。三角錐の体積 $v$ は

$$v = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}a = \frac{3+\sqrt{5}}{48}a^3$$

したがって正 20 面体の体積 $V$ は

$$V = 20v = \frac{15+5\sqrt{5}}{12}a^3$$

と求まる。

# ■ 教育 物理 解答

1. **(i)** $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ を時間微分すると

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k} + A_x\frac{d\vec{i}}{dt} + A_y\frac{d\vec{j}}{dt} + A_z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

これを与えられた式

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k} + \vec{\omega}\times\vec{A}$$

と比べて

$$A_x\frac{d\vec{i}}{dt} + A_y\frac{d\vec{j}}{dt} + A_z\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{A} \qquad \cdots (1)$$

を得る。ここで $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ に対して

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + \vec{\omega}\times\vec{r} \qquad \cdots (2)$$

さらに時間微分を行って

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + \dot{x}\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{k}}{dt} + \vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}$$

ただし $\vec{n}$ は定ベクトルなので $\dot{\vec{\omega}} = \omega\dot{\vec{n}} = 0$ を用いた。 (1),(2) を代入して

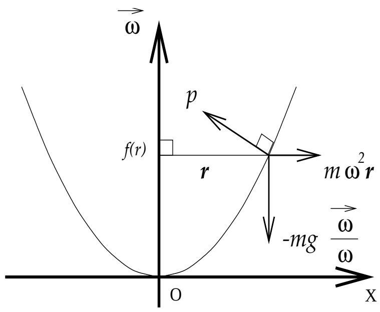
$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a} + 2\vec{\omega}\times\vec{v} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

ただし $\vec{a} \equiv \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$ 、$\vec{v} \equiv \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$ はそれぞれ回転座標系における加速度および速度にあたる。
外力 $\vec{F}$ は $m\ddot{\vec{r}}$ に等しいから

$$m\vec{a} = \vec{F} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

第 2 項がコリオリ力、第 3 項が遠心力に対応する。

**(ii)** 水面が安定する条件を考える。水面付近の水にその水面と垂直でない成分を持つ力が働くと、そこの水はその方向に動いてしまうと考えられる。よって水面が安定するにはその水面に対し垂直な力のみが働く時になる。そして、これが圧力 $\vec{P}$ によって支えられている。図のように水面の水の位置ベクトルを回転の中心軸から $\vec{\omega}$ に垂直にとる。また水面の高さを $f(x)$ であらわすと




$$0 = -mg\frac{\vec{\omega}}{\omega} + \vec{P} + m\vec{\omega}^2\vec{r}$$

$\vec{\omega}/\omega$ と $\vec{r}/r$ を成分で表すと

$$0 = -mg + P\frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \qquad \cdots (3)$$

$$0 = -P\frac{f'(r)}{\sqrt{1+f'(r)^2}} + m\omega^2 r \qquad \cdots (4)$$

$P$ を消去して

$$f'(r) = \frac{\omega^2}{g}r$$

積分して

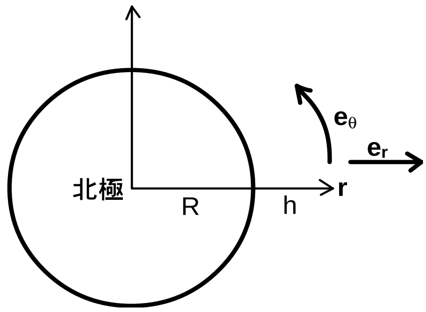
$$f(r) = \frac{\omega^2}{2g}r^2 + C_0$$

但し $C_0$ は定数である。
以上より水面は放物線になることがわかる。

**(iii)** 回転座標系を円柱座標で表す。

$$\vec{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \quad \vec{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \quad \vec{e}_z = (0, 0, 1)$$

であるから




$$\dot{\vec{e}}_r = \vec{e}_\theta\dot{\theta}, \quad \dot{\vec{e}}_\theta = -\vec{e}_r\dot{\theta}, \quad \dot{\vec{e}}_z = \vec{0}$$

となる。よって $\vec{r} = r\vec{e}_r$ を時間微分すると

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

図のように座標系をとると

$$m\vec{a} = -mg\vec{e}_r - 2m\vec{\omega}\times\vec{v} + m\omega^2 r\vec{e}_r$$

$\vec{a} \Rightarrow \ddot{\vec{r}}$、$\vec{v} \Rightarrow \dot{\vec{r}}$ と置き換えて $\vec{e}_r$ 成分と $\vec{e}_\theta$ 成分に分けると

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -g + \omega^2 r + 2\omega r\dot{\theta}$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -2\omega\dot{r}$$

ただしコリオリ力 $F$ は

$$F = -2m\vec{\omega}\times\vec{v} = -2m\omega\vec{e}_z\times\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right) = -2m\omega\left(\dot{r}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}\vec{e}_r\right)$$

と計算した。$\vec{e}_\theta$ 成分の式は

$$r\frac{d\dot{\theta}}{dt} = -2\frac{dr}{dt}\left(\dot{\theta} + \omega\right) \quad \leftrightarrow \quad \frac{d\ln\left(\dot{\theta} + \omega\right)}{dt} = -2\frac{d\ln r}{dt} \quad \leftrightarrow \left(\dot{\theta} + \omega\right) = \frac{C}{r^2}$$

と積分ができ、初期条件 $\dot{\theta} = 0$ , $r = R + h$ を代入して

$$\dot{\theta} = \omega\left(\frac{(R+h)^2}{r^2} - 1\right) \qquad \cdots (5)$$

ここで $r$ は $R + h \sim R$ の値をとり $R \gg h$ を考えると $\dot{\theta}$ は $\omega$ ぐらいかそれよりも小さい値をとる。よって運動方程式の $\vec{e}_r$ 成分は

$$\ddot{r} = -g\left(1 + O\left(\frac{\omega^2 R}{g}\right)\right)$$

となる。実際に地球の自転、半径を入れて見ると

$$\frac{\omega^2 R}{g} = \left(\frac{2\pi}{24\times 60\times 60}\right)^2 \frac{6.4\times 10^6}{9.8} \sim 0.003$$

この項は微小になり無視できる。$\dot{r}(t = 0) = 0$ , $r(t = 0) = R + h$ であるから

$$r = (R + h) - \frac{gt^2}{2}$$

これを式 (5) に代入して

$$\dot{\theta} = \omega\left\{\frac{(R+h)^2}{((R+h) - gt^2/2)^2} - 1\right\} = \omega\left\{\frac{1}{(1 - gt^2/2\,(R+h))^2} - 1\right\} \simeq \omega\left(1 + \frac{gt^2}{R+h} - 1\right) = \frac{\omega g t^2}{R+h}$$

これを積分して

$$\theta = \frac{\omega g t^3}{3\,(R+h)}$$

質点が落下する $(r = R + h \ \rightarrow \ r = R)$ のに要する時間は $r = (R + h) - \frac{gt^2}{2}$ より $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ この間 $\theta$ は $\theta = 0$ から

$$\theta = \frac{\omega g}{3\,(R + h)}\Big(\sqrt{\frac{2h}{g}}\Big)^3$$

だけずれる。これは地表面では $(h/R \ll 1)$

$$\frac{\omega g}{3}\Big(\sqrt{\frac{2h}{g}}\Big)^3 \frac{R}{R + h} \simeq \frac{\omega g}{3}\Big(\sqrt{\frac{2h}{g}}\Big)^3$$

$h = 490\text{m}$ の場合

$$\frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60}\,\frac{9.8}{3}\Big(\sqrt{\frac{2 \times 490}{9.8}}\Big)^3 = 24\text{cm}$$

**(iv)** 地上に達するまでには $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ かかる。初速度が $h\omega$ ならばこの間に $h\omega t = h\omega\sqrt{\frac{2h}{g}}$ だけ進む。これは明らかに **(iii)** の答え

$$\frac{\omega g}{3}\Big(\sqrt{\frac{2h}{g}}\Big)^3 = \frac{2}{3}h\omega\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

と異なる。この考察に地球の回転が質点が発射された瞬間においてのみ加味されているからである。つまり質点の相対速度は高さ $x$(m) の時 $x\omega$ であるのだからずれる距離は $\int_{x=h}^{x=0} x\omega dt$ で与えられる。これに $x = h - \frac{gt^2}{2}$ を代入すれば

$$\int_{t=0}^{t=\sqrt{2h/g}}\left(h - \frac{gt^2}{2}\right)\omega dt = \omega[ht - \frac{gt^3}{6}]_{t=0}^{t=\sqrt{2h/g}} = \frac{2}{3}\omega h\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

と答えは一致する。

2. **(i)** 極板間の電場と電位差は、ガウスの法則より

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0\pi a^2}, V = \frac{Qd}{\varepsilon_0\pi a^2}$$

よって、$Q = CV$ より

$$C = \varepsilon_0\frac{\pi a^2}{d}$$

よって、電磁場のエネルギーは

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\pi a^2 d = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0\pi a^2} = \frac{Q^2}{2C}$$

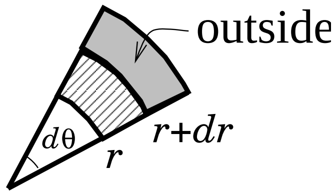
**(ii)** 極板間には電位差 $V = Q/C$ があるのでこれによって針金には電流が流れる。よって

$$I(t) = \frac{V}{R} = \frac{q(t)}{RC}$$

$I(t)$ は極板上の電荷が減少して針金に流れ込む事によって流れるのだから $I(t) = -dq(t)/dt$ 。よって

$$-\frac{dq}{dt} = \frac{q(t)}{RC} \Rightarrow q(t) = q(0)\exp(-t/RC)$$
$$\Leftrightarrow I(t) = \frac{q(0)}{RC}\exp(-t/RC)$$

**(iii)** 極板上の電荷は一様に減って中心の針金に流れるのであるから、その流れは中心に向かっていて、中心に対して対称のはずである。そこで半径 $r(< a)$ の点における弧に対する電流線密度を $\vec{i}(r)$ とする。時間 $dt$ に図の部分から中心に向かう電荷はその定義により $i(r)\cdot rd\theta\cdot dt$ となる。これはその外側の部分から $i(r+dr)\cdot(r+dr)d\theta\cdot dt$ だけ、また斜線部から電荷が減少することによって $-dq(t)/\pi a^2 \times rd\theta dr$ だけ供給される。よって




$$i(r)rd\theta dt = i(r+dr)\cdot(r+dr)rd\theta\cdot dt - dq(t)/\pi a^2 \cdot rd\theta dr$$

$-dq(t) = I(t)dt$ に注意して

$$\leftrightarrow \frac{i(r+dr)\cdot(r+dr) - i(r)r}{dr} = -\frac{I(t)r}{\pi a^2} \leftrightarrow \frac{d}{dr}i(r)\cdot r = -\frac{I(t)r}{\pi a^2} \leftrightarrow i(r)dr = -\frac{I(t)r^2}{2\pi a^2} + C$$

極板の周辺 $(r = a)$ では電流供給源が無いから $\vec{i}(r = a) = 0$ のはず。

$$i(a)\cdot a = -\frac{I(t)a^2}{2\pi a^2} + C = 0 \leftrightarrow C = \frac{I(t)}{2\pi}$$

これより

$$i(r) = \frac{I(t)}{2\pi r}\left(1 - (r/a)^2\right)$$

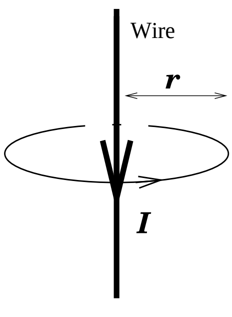
これは境界条件 $i\cdot 2\pi r = I(t)(r \to 0)$ も満たす。このことは極板上の電流は全て $r \to 0$ でまとまっていて $I(t)$ となって針金を流れると言うことをいっている。

変位電流は極板間の電束密度の減少を説明するもので

$$\frac{\partial D}{\partial t} = i_e \leftrightarrow i_e = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\frac{V(t)}{d}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0\frac{R}{d}I(t) = \frac{\varepsilon_0}{Cd}I(t) = \frac{I(t)}{\pi a^2}$$

ただし $C = \varepsilon_0\pi a^2/d$ としている。実際 $\vec{D}$ の減少は $I(t)$ によるもので、この減少が一様におきているならば電流密度が一様に $I(t)/\pi a^2$ と分布していて、これが原因と考えられるので *O.K.*

**(iv)**




その対称性により磁場の極板に平行な成分は極板との距離によらず円周方向成分のみを持つ。そこで左の図のような経路に対して

$$\nabla\times\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{i}_e$$

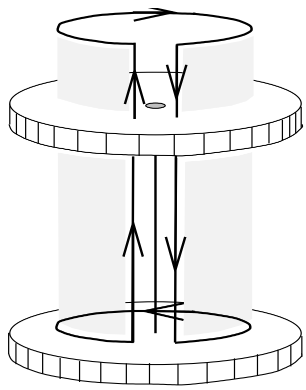
を表面積分すると

$$\int\vec{H}d\vec{s} - \frac{\partial}{\partial t}\int\vec{D}d\vec{s} = \int\vec{i}d\vec{s}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} H(r)2\pi r - \frac{I}{\pi a^2}\pi r^2 = -I & (r \le a) \\ H(r)2\pi r - \frac{I}{\pi a^2}\pi a^2 = -I & (r > a) \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} H(r) = -\frac{I}{2\pi r}\left(1 - (r/a)^2\right) = -i(r) & (r \le a) \\ H(r) = 0 & (r > a) \end{cases}$$

これは右の図の経路を使っても求められる。この場合、この経路によって囲まれた面に垂直な $\vec{D}$ 成分は無いので



$$\nabla \times \vec{H} = \vec{i}_e$$

面に流れ込んで来るのは極板上の電流線密度である。よってこの表面積分は

- $r \geq a$ の時

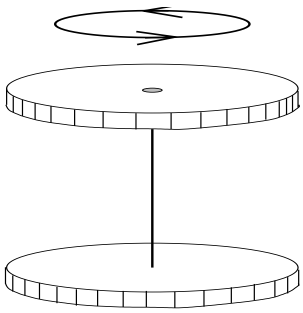
$$H_{in} \cdot 2\pi r - H_{ex} \cdot 2\pi r = \vec{i} \cdot 2\pi r$$

$$H_{in}(r) = \vec{i} + H_{ex}(r)$$

- $r < a$ の時

$$H_{in} \cdot 2\pi r = H_{ex} \cdot 2\pi r = 0$$

$$H_{in}(r) = H_{ex}(r)$$



極板の上で表面積分を上の図のように行えば

$$H_{ex} \cdot 2\pi r = 0 \leftrightarrow H_{ex} = 0$$

よって

$$H_{in}(r) = \begin{cases} -i & (r \leq a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

と同様の事が導かれる。
コンデンサーの外側で磁場が無いのは前者の解法によれば針金を流れる電流が作る磁場を電束密度が変化する事により生じる磁場がちょうど打ち消すためである。この電束密度の変化は極板上の電荷が減少するためであり、言葉を変えると、極板を流れる電流のためと言える。つまり、外側で磁場が無いのは針金の電流が作る磁場を極板を流れる電流が打ち消すためであると言える。

**(v)** 電磁場のエネルギーの流れは Poynting Vector

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

から求められる。 $\vec{E}$ が極板 $Q$ から極板 $-Q$ 向きへ、 $\vec{H}$ が極板 $Q$ から見て右周りであるから $\vec{S}$ は針金に向かう。 $\vec{H}$ と $\vec{E}$ とは交わっているから

$$S = \frac{V}{d}\frac{I}{2\pi r}\left(1 - (r/a)^2\right) = \frac{RI^2}{2\pi rd}\left(1 - (r/a)^2\right)$$

針金に吸い込まれて行くエネルギーは針金の半径を $\rho \gg a$ として

$$S_\rho \cdot 2\pi\rho d = \frac{RI^2}{2\pi\rho d}\left(1 - (\rho/a)^2\right)2\pi\rho d = RI^2 \ \ (\rho/a \gg 1)$$

また Joule 熱は $VI = RI^2$ となるから、と一致しており、電磁場のエネルギーが針金で Joule 熱になっているといえる。

3. 理想気体では、$dU = C_V dT$ であり、等温過程では $dU = 0$ でるから、熱力学第一法則より、$d'Q = pdV$
ここで、１モルの理想気体の状態方程式 $pV = RT$ から、p を消去して整理すると、

$$\frac{d'Q}{T} = R\frac{dV}{V}$$

したがって、$1 \to 2$ に対するエントロピーの変化は次のようになる。

$$\Delta S_{12} = \int \frac{d'Q}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RdV}{V} = R\ln\frac{V_2}{V_1}$$

断熱膨張過程では、$d'Q = 0$ であるから、

$$\int \frac{d'Q}{T} = 0$$

断熱自由膨張過程が準静的であるとすると、これが $1 \to 2$ に対するエントロピー変化を与えることになる。しかし、準静的な変化であれば、過程によらず同じエントロピー変化が得られるはずである。したがって **(i)** との比較から、断熱自由膨張過程が準静的でないことがわかる。

**(ii)** 準静的断熱過程では $dQ' = 0$ であるから、熱力学第一法則より $C_V dT + pdV = 0$ が成り立つ。

ここで状態方程式より、$pV = RT$ から、$p$ を消去して整理すると、

$$\frac{dV}{T} + \frac{R}{C_V}\frac{dV}{V} = 0$$

両辺積分して整理すると、$TV^{\frac{R}{C_V}} = const.$ となる。

さて、マイヤーの法則 $C_P = C_V + R$ を変形して、

$$\frac{R}{C_V} = \gamma - 1$$

したがって、$TV^{\gamma-1} = const.$ 。また、状態方程式より $T$ を消去すると、$pV^\gamma = const.$。

これより、$p_1V_1^\gamma = p_2V_4^\gamma$ よって、$V_4 = V_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma}$

**(iii)** $1 \to 4$:

断熱過程であることから $dQ' = 0$。よって、$\Delta S_{12} = 0$。

$4 \to 3$:

理想気体では $dU = C_V dT$ であり、$p = p_2$ の等圧過程であるかことから、

$$d'Q = C_V dT + p_2 dV$$

ここで、状態方程式 $p_2V = RT$ の微分から、$p_2 dV = RdT$ なので、

$$d'Q = \frac{C_V}{R}p_2 dV + p_2 dV$$

マイヤーの関係式を使えば、

$$d'Q = \frac{C_P}{p_2}dV$$

また、状態方程式から $p_2$ を消去すれば、

$$d'Q = \frac{C_P}{R}\frac{RT}{V}dV \Longleftrightarrow \frac{d'Q}{T} = C_P\frac{dV}{V}$$

よって、この過程におけるエントロピー変化は、

$$\Delta S_{43} = \int \frac{d'Q}{T} = \int_{V_4}^{V_1} C_P\frac{dV}{V} = C_P\ln\frac{V_1}{V_4}$$

$3 \to 1$:

熱力学第一法則より、$d'Q = C_V dT$。状態方程式を微分した式をもちいれば、

$$dT = \frac{V_1}{R}dp = T\frac{dp}{p}$$

したがって、

$$d'Q = C_V T \frac{dp}{p} \iff \frac{d'Q}{T} = C_V \frac{dp}{p}$$

よってこの過程におけるエントロピー変化は

$$\Delta S_{31} = \int \frac{d'Q}{T} = \int_{p_2}^{p_1} C_V \frac{dp}{p} = C_V \ln \frac{p_1}{p_2}$$

以上より、循環過程 $1 \to 4 \to 3 \to 1$ におけるエントロピー変化は、

$$\Delta S_{14} + \Delta S_{43} + \Delta S_{31} = C_P \ln \frac{V_1}{V_4} + C_V \ln \frac{p_1}{p_2}$$

このエントロピー変化は 0 になるはずなので、

$$V_4 = V_1 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{C_V}{C_P}}$$