1993年度　入学試験 一般教育科目

■ 教育 英語

1. 以下の英文を読み、設問に答えよ。解答は解答用紙の所定欄に記せ。

A future of climate warming is often described as an increase in the greenhouse effect. It is easy to envision a glassed-in building trapping the heat of the sun, creating a climate that is quite different from the surroundings. (a)The Earth with its atmosphere acts very much like a greenhouse. Without our atmosphere, the climate on the surface of the earth would be very harsh with nothing to prevent the planet's heat from escaping into space. Instead of glass, the Earth is surrounded by gases, and among them are gases that have an ability to trap heat.

One of the major greenhouse effect gases is water vapor. Other greenhouse gases are carbon dioxide, methane, nitrous oxide and chlorofluorocarbons(CFCs). (b)It is these gases that are the cause for concern when talking about man-made climate warming and climate change. The concentrations of all of them are increasing in the atmosphere and the prediction is that their accumulation is enhancing the natural greenhouse effect. It will become a warmer greenhouse because the gases will be even more effective in trapping the heat trying to leave the atmosphere.

A planet is, however, both larger and more complex than an ordinary greenhouse and the atmosphere does not evenly spread an increase in temperature. (c)Rather, the Earth with its atmosphere can be described as a playground for weather systems, where air, water and land interplay to determine the climatic patterns in different regions. If North Atlantic low pressure path moves a little north or south, this might not seem like a big change on the global scale, but for the weather of Northern Europe it is what determines the number of clear and rainy days or if there will be real winter weather. A shift in the monsoon further north might bring more rain to the dry sub-Saharan region, but it is difficult to predict how much and when. And no one knows how fast the rain water will evaporate as the temperature may also increase. (d)This complexity is one of the reasons scientists are still reluctant to make regional predictions about the effects of climate warming, even when they are quite confident about the global trends.

—quoted, with modifications, from Annika Nilsson,
Greenhouse Earth, John Wiley & Sons, 1992.

carbon dioxide : 二酸化炭素　methane : メタン　nitrous oxide : 一酸化二窒素
chlorofluorocarbons(CFCs) : フロン

[設問]

(i) 下線部 (a) を 100 字以内で和訳せよ。

(ii) 下線部 (b) を 100 字以内で和訳せよ。

(iii) 下線部 (c) を 100 字以内で和訳せよ。

(iv) 下線部 (d) を 100 字以内で和訳せよ。

2. 以下の英文を読み、設問に答えよ。解答は解答用紙の所定欄に記せ。

Ever since it was realized that an organism does not pass a simulacrum of itself to the next generation, but instead provides it with genetic material containing the information needed to construct a progeny organism, we have wanted to define the nature of this material and the manner in which its information is utilized. Now that we know the physical structure of the genetic material, we may state the aim of molecular biology as defining the complexity of living organisms in terms of the properties of their constituent molecules.

The gene is the unit of genetic information. The crucial feature of Mendel's work, a century ago, was the realization that the gene is a distinct entity. The era of the molecular biology of the gene began in 1945 when Schrödinger developed the view that the laws of physical might be inadequate to account for the properties of the genetic material, in particular its stability during innumerable generations of inheritance. The gene was expected to obey the laws of physics so far established, but it was thought that characterizing the genetic material might lead to the discovery of new laws of physics, a prospect that brought many physicists into biology.

Now, of course, we know that a gene is a huge molecule, in fact part of a vast length of genetic material containing many genes. A gene does not function autonomously, but relies upon other cellular components for its perpetuation and function. All of these activities obey the known laws of physics and chemistry; and it has not, in the end, been necessary to invoke the new laws.

—quoted from Benjamin Lewin, *Gene IV,*
Oxford University Press, 1990.

simulacrum : 像、姿、影、幻影　progeny : 子孫、子供

[設問]

(i) 下線部を 120 字以内で和訳せよ。

(ii) 多くの物理学者が生物学を始めたのはなぜか、又、その結果はどうであったか、本文に基づき 100 字以内で述べよ。

3. 以下の英文を読み、設問に答えよ。解答は解答用紙の所定欄に記せ。

In a democratic society, the strong support of the general public is needed in order to maintain a strong base in science. It is essential, therefore, to show the public why that support is important. <u>(a)The direct relation between science and technology is often difficult to discern, except by hindsight, even though there are many examples of observable pathways to the use of newly understood or newly recognized phenomena — witness developments in molecular bioscience.</u> There is also a strong strand in our system, that is science, that ties together the gathering of all added understanding of nature's materials, forces, space, and time with the use of our biosphere for the support of all human race through technology. That strand is steady stream of educated scientists and engineers that our educational has provided over years.

Science is an important part of our culture but it is vital to our continued existence — hence the educated stream of scientists and engineers must continue apace. However, in making sure of the continuing success of this important task, the community has taken to looking at students at the beginning of the educational pipeline only in terms of future professionals or of future major users of science. This posture has led the science and technology community to set aside the equally important aspect of public literacy in science. Although this was not a deliberate decision, it had the effect of widening the gap between <u>(b)"us and them"</u> — a totally undesirable effect.

At least part of the problem lies in our wish to make sure that every observable is understood in the best current thinking. This ignores the fact that 99% of the population is not involved in science or engineering research, nor do they want to be. Yet many are likely to be interested in the observables of nature and the best lay explanation of them.

Indeed, in our own best interest, as well as for the society as a whole, we should put our best creative efforts into solving the problem of how to fan the interest of nonscience majors in nature's phenomena. That means developing laboratory exercises and textbook designed to enhance the interest of nonprofessionals in such phenomena without losing them in a sea of current explanations. The net result of such a course or group of courses would be a major seeding in terms of public literacy with respect to science and technology with a consequent stronger foundation for public support of science in universities.

It is not only important that the community recognizes the problem but that its best talent should set about to correct it. It is, of course, equally important that such actions as are undertaken are not at the expense of the science enterprise itself.

—quoted, with modifications, from *Science*, 1992.

by hindsight : あとになってみると　strand : よった糸
biosphere : 地球で生命が存在するところ、生命圏　literacy : 教養　lay : 平易な

[設問]

(i) 下線部 (a) を和訳せよ。

(ii) 下線部 (b) の us と them はそれぞれ何を指すか日本語で答えよ。

(iii) この文章の要旨を 200 字以内の日本語にまとめて記せ。

4. 次の文章の下線部分の和文を英訳せよ。解答は解答用紙の所定欄に記せ。

　宇宙の無秩序さ、すなわちエントロピーの総量は常に時間と共に増大している。ある物体の秩序が増加できるのは、まわりで無秩序の増分が物体の秩序の増分を上回る場合に限られる。(a) 生命とは無秩序に向かう傾向に逆らって自分自身を複製することが出来るような秩序あるシステムと定義できる。すなわち、生命は似てはいるが独立した秩序あるシステムを作ることができる。(b) これらのことを行なうために、システムは食物、日光、電力などの秩序あるエネルギーを熱の形で無秩序なエネルギーに変換しなければならない。結果としてこのシステムは無秩序の総量は増加するという要請を満たすことができる。

—quoted with modifications from a lecture(*Life in the Universe)* by S. W. Hawking(1991).

無秩序な : disordered

5. 次の文章を英訳せよ。解答は解答用紙の所定欄に記せ。

　科学は、その本質から考えて、それまでの研究者たちによって作られた大きな建造物のてっぺんに、新しい材料を付加することによって成長する構造体である。以前に何が知られていたかに全く無知の個人が、意味のある新しい貢献をする機会はほとんどない。したがって、新しい研究計画を始める前には、その研究分野の現状を調べ上げておくことが基本的に重要である。

■ 教育 数学

1. 平面上の次の関数について以下の設問に答えよ。

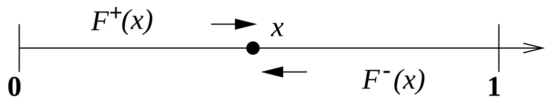
$$f(x,y) = (x^4 - y^2)\exp(-r^4), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

(i) 最大値と最小値の存在を示し、これらを求めよ。

(ii) 次の積分を求めよ。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2. x 軸上の区間 $[0,1]$ を図のように x 軸の正方向と負方向に進む粒子群がある。位置 x でのそれぞれの群の流量を $F^+(x)$ (個/秒) および $F^-(x)$ (個/秒) とする。ある群の流量が F であるとき、距離 ds を進む間に Fds (個/秒) の粒子が x 軸を構成する格子と衝突する。衝突するたびに粒子群の一部は確率 a で消滅し、残りは進行方向および反対方向に確率 f と b で散乱される。すなわち、$a+b+f=1$ である。
ただし粒子の速さはすべて同じで、散乱の際にも粒子の速さは変化しないものとする。また格子点は一様で十分数が多いので、x 軸は連続体とみなして良い。このとき、次の設問に答えよ。



(i) 流量 $F^+(x)$ と $F^-(x)$ を支配する x についての一階連立微分方程式を導け。

(ii) 次の行列の固有値および固有ベクトルを求めよ。ただし、固有ベクトルの第一成分は 1、また、$\alpha > \beta > 0$ とする。

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & +\beta \\ -\beta & +\alpha \end{pmatrix}$$

(iii) (ii) の結果を利用して (i) の方程式系を解け。ただし、境界条件として粒子は $x=0$ で区間に流量 1 個／秒で流入しており、また、$x=1$ で区間に流入する粒子は無いとする。さらに $a, b > 0$ とする。

3. 正の整数 N の分割数 $P(N)$、すなわち N を N 以下の正の整数の和で表す場合の数を考える。例えば、$N=3$ のとき、$N = 3 = 2+1 = 1+1+1$ であるから、$P(3)=3$ である。また、$P(0)=1$ と約束する。このとき次の設問に答えよ。

(i) $P(4), P(5)$ を求めよ。

(ii) 負でない整数 n を正の整数 m 以下の正の整数の和で表す場合の数を $p(n,m)$ と書く。ただし $p(0,m)=1$ と約束する。この時分割に現れる最大数に着目して $p(n,m)$ を $p(n',m')$,
$n' < n, m' \le m$ を用いて表しなさい。

(iii) (ii) の結果を用いて $P(8)$ を求めよ。

(iv) 問題とする場合の数 $q(n)$ を係数とする、べき級数 $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q(n)x^n$ を $q(n)$ の母関数という。例えば、$p(n,2)$ に対する母関数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n,2)x^n = (1 + x^1 + x^{1+1} + \cdots)(1 + x^2 + x^{2+2} + \cdots)$$

で与えられる。これを参考にして $P(N)$ の母関数 $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n$ を $g(x) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{f_k(x)}$ の形で与える多項式 $f_k(k)$ を求めよ。

■ 教育 物理

1. 質量 M、半径 R の一様な円盤が、傾斜角 θ の坂をすべらずに転がり落ちる運動を考える。斜面に沿って x 軸をとり、重力加速度を g、ころがりまさつ力を F として次の問に答えよ。

    (i) 円盤重心の x 方向の運動方程式を示せ。

    (ii) 円盤の回転軸まわりの慣性モーメント I を求め、回転に関する運動方程式を示せ。

    (iii) x 方向の速度 v と、回転角速度 ω の関係を示せ。

    (iv) 以上の関係を整理して、x 方向の加速度が、まさつがなかった場合の何倍になっているのかを求めよ。

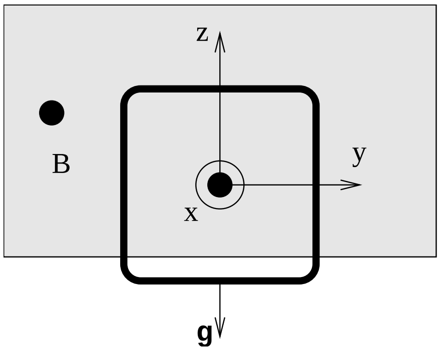
2. 図に示すように金属線で出来た正方形のループが yz 面内にある。ループの上半分に強さ $B[T]$ の一様磁場がループ面と垂直（x 軸方向）にかかっており、また、ループは下方に重力を受けているものとする。
ループの一辺の長さを L[m]、金属線の断面積を $s[\mathrm{m}^2]$、金属の密度を $d[\mathrm{kg/m}^3]$、金属の抵抗率を $\rho[\Omega\mathrm{m}]$、重力加速度を $g[\mathrm{m/s}^2]$ として、以下の問に答えよ。ただし、空気の抵抗は無視し、ループが回転してしまうことは無いものとする。また、ループは十分に大きいとして、ループ全体が磁場の外に出てしまう場合を考慮する必要はない。

    (i) ループが速度 v で落下しているとき、ループに流れる電流 I の向きを図示し、その大きさを求めよ。

    (ii) ループにながれる電流と磁場 B とによってループが受けるローレンツ力 F の方向を図示し、その大きさを求めよ。

    (iii) ループの落下運動をあらわす運動方程式を書き下せ。

    (iv) ループの初速を 0 として落下速度 v を時間の関数として求め、v の変化の様子をグラフに示せ。



3. 圧力 p と単位体積あたりの内部エネルギー u の間に

$$p = \frac{1}{3}u$$

の関係が成り立つ気体がある（光子気体）。$u = u(T)$ が温度 T のみの関数であるとして、その関数形を求めたい。以下の問に答えよ。

    (i) 断熱過程において圧力 p と体積 V の間に $pV^{4/3} =$ 一定 の関係が成り立つことを示せ。

    (ii) 四つの状態 A, B, C, D を通り、等温膨張 ($A \to B$)、断熱膨張 ($B \to C$)、等温圧縮 ($C \to D$)、断熱圧縮 ($D \to A$) という四つの準静的過程からなる可逆サイクルを考える。このサイクルの $p - V$ 図の概略を描け。但し、状態 A, B, C, D における体積をそれぞれ $V_A, V_B, V_C,$
V_D とし、等温過程 $A \to B$ 及び $C \to D$ における温度をそれぞれ T_1 及び T_2 とする。

    (iii) 上記のサイクルで、等温過程 $A \to B$ 及び $C \to D$ の間に吸収する熱量をそれぞれ Q_1 及び Q_2 とするとき、Q_1, Q_2 を求めよ。

    (iv) このサイクルが可逆であることを用いて

$$\frac{u(T_1)^{1/4}}{T_1} = \frac{u(T_2)^{1/4}}{T_2}$$

が成り立つことを示せ。
[参考:これにより、Stefan-Boltzmann の法則 $u(T) = \sigma T^4$ （σ は定数）が得られる。]

■ 教育 英語 解答

1. **全訳**

気候の温暖化の先行きについて、よく温室効果の増大が言われます。太陽の熱を捕らえるガラス張りの建物が、まわりとかなり異なる気候を作り出すのを思いめぐらすのは、たやすいことです。(a) 地球は大気のおかげで、温室同様の効果を持ちます。大気がなかったならば、地表での気候は、地球の熱が宇宙へ逃げるのを妨げるものがないことから、とても苛酷なものとなるでしょう。(85 字) ガラスの代わりに地球は気体に囲まれており、そのいくつかは熱を捕らえておく力があります。

主として温室効果を起こす気体のひとつは水蒸気です。他には、二酸化炭素やメタンや一酸化二窒素、フロンがあります。(b) こういった気体が人類による気候温暖化や気候変化が話題となる時の関心のもとになります。(41 字) これら全ての集合体が大気中に増大しつつあることで予想されるのは、そういう気体が蓄積することで自然による温室効果に拍車がかかることです。そうなれば、大気から逃れようとする熱をもっと効果的に引きとどめるようになるので、地球の温暖化が進むことになります。

しかし、惑星は温室よりずっと大きく複雑であるので、大気は温度の上昇を一様に進めてくれるわけではありません。(c) むしろ、大気を持つ地球は、気象システムの運用の場とみなすことができます。地球では、風、水、地が相互作用して様々な地域での気候を決めているのです。(77 字) もし、北大西洋低気圧が、少し北か南へずれていれば、地球規模では大きな変化はみられないでしょうけれども、北欧の気候においては、晴れや雨の日数を決めることになりますし、真冬並の気候になるかもしれません。モンスーンがずっと北方へずれれば、乾期の小サハラ地方に雨が降りますが、いつどれくらい降るかまでは予報しがたいものがあります。そして、温度も上昇するかもしれませんが、それにつれてどれくらいはやく雨水が蒸発するかは誰もわかりません。(d) こういった 複雑さを理由の一つとして、科学者たちは依然として地域に限る気候温暖化の予言をするのに躊躇しています。もっとも、地球規模での移り変わりにはかなりの自信があるのですが。(93 字)

2. **全訳**

(i) 生物は自分の形を次の世代に渡すのではなく、そのかわりに、遺伝物質を渡すことが発見された。その遺伝物質は子孫の生物を構成するために必要な情報を含んでいる。その発見以来ずっと、私たちはこの物質の性質や遺伝情報の使われ方を定めたいと考えてきた。 (119 字) 今や、私たちはその遺伝物質の物理的構造を知るようになったので、分子生物学では、構造物質の特性を通じて、生体の多様性を理解することを目標にしているということができるかもしれない。

遺伝子は、遺伝情報の単位である。約一世紀前のメンデルの実験によって、遺伝子は明らかに存在するという認識が決定的になった。遺伝子の分子生物学が始まったのは、1945 年で、そのとき、シュレディンガーは、物理法則は、遺伝物質の特性、特に、数多くの遺伝の発現の間の遺伝子の安定性を説明するのにふさわしくないという予見を発展させた。遺伝子は、既存の物理法則に従うと予想されていたが、一方で、遺伝物質を特定することによって、新しい物理法則が発見されるかも知れないと考えられており、そのため、多くの物理学者が生物学を始めた。

現在、勿論、遺伝子は、大きな分子であって、実際、遺伝物質の巨大な物質の一部に、沢山の遺伝子を含んでいることを知っている。遺伝子は、自発的には働かず、安定して存在したり機能したりするのには、細胞の他の要素が必要となる。それらの活動は、既知の物理法則に従い、結局、今のところ、新しい物理法則を打ち立てる必要性はないままである。

— Benjamin Lewin, 『遺伝子 IV』, オックスフォード大学出版会, 1990

(i) 全訳の本文参照。

(ii) 遺伝物質は既存の物理法則の枠に支配されていると考えられていたが、これを調べることにより、新しい物理法則を発見できると予想された。しかし、そのような新しい物理法則の発見はなかった。

3. **全訳**

民主主義の社会では科学の丈夫な土台を維持するために一般大衆の強い支持が必要である。その支持がなぜ重要であるのかを大衆に示すのはそのため大切なことである。(a) 科学と技術のあいだの直接の関係は往々にして、後になってわかるものを除いては見定めることは困難である。もっとも、分子生物学における新たな現象の理解や 認識が目に見えて実用化されていった道のりの多くの例があるが。我々のシステムには強くよった糸もある、それは科学であり技術を通じて、人類を支えるために生命圏を利用して自然の物質、力、空間、そして時間に関する理解の足し合わせたものを一つにまとめるものである。そのよった糸こそが我々の教育システムが長年に渡って供給してきた、教養ある科学者と技術者のしっかりした流れなのである。

科学は我々の文化の大事な部分である、そして我々が存在し続けるために必要不可欠なものである。故に教養ある科学者と技術者の流れは歩調をあわせて存続しなくてはいけない。しかしながら、この重要な課題を確実に絶えまなくするために、共同体は教育制度初期において生徒達を将来のプロフェッショナルか、未来の科学の主要な利用者になるだろうとしてしか見てこなっかた。この態度によって科学技術の共同体は、一般の人々の科学の教養という同様に重要な側面を脇に退けてきた。これは故意にそうしたのではないが、“(b) 我々と彼ら” のあいだのギャップの大きさを広げる効果があった。(全く望ましくない効果である)

少なくとも問題の一部は、観測しうるすべてのものは現在最高の頭脳によって確実に理解しようとする我々の願望にある。このことは人口のうち 99% が科学、または技術の研究に関わっていなく、またそうしたいとも思っていないという事実を無視している。とはいえ多くの人は自然で観測されるものや、それらの最良の平易な説明に興味を持っているらしい。

実際のところ我々自身のために、社会全体のためにも我々は最大の創造的努力を、自然現象に対する科学無教養な大衆の興味をいかに魅了するかということに注がなくてはいけない。それが意味することは実験室での実習の発展とともに、現在の説明の大海原のなかで自分を見失うことなしに、そんな現象にたいする非プロフェッショナルな人々の関心を高めるように編集された教科書の発展である。そのような課程、または複数の課程の正味の結果は大衆の科学技術に対する教養にとって主要な種付けとなり、その帰結として大衆による大学での科学の支持にとってはより強い土台となるであろう。

共同体はその問題に気付くことだけが重要なのではなくて、最良の手段でそれを正すようにすべきだ。もちろん実行されるような行動が科学事業自身の損失にならないようにするのも同様に重要である。

—サイエンス 1992 から修正を施して引用

(i) (a) の和訳は本文中を参照

(ii) us　筆者のような科学・技術の専門家、プロフェッショナル
them　科学や技術の研究に携わっていない一般大衆

(iii) 大衆に科学支持の必要性を示すのは重要であるが科学の実用的価値を示すのは困難である。科学は我々に不可欠のものだが科学の専門家を養成することに専念するあまり一般大衆との格差が広がってしまった。ほとんどの人は科学に従事していないにもかかわらず、自然現象には興味を持っている。それを失わないような方法で科学教育を発展させなくてはならない。また共同体はその問題に気付くだけではなく実行に移さなくてはならない。(199 字)

4. The total amount of disorder,or entropy, in the universe always increases with time. The order in one body can increase provided that the amount of disorder in its surroundings increases by a greater amount. (a)One can define life to be an ordered system that can sustain itself against the tendency to disorder and can reproduce itself. That is, it can make similar, but independent, ordered systems.

(b)To do these things, the system must convert energy in some ordered forms - like food, sunlight, or electric power - into disordered energy in the form of heat.In this way, the system can satisfy the requirement that the total amount of disorder increases.

[別解]

(a) Life can be defined as the ordered system that is capable of duplicating itself and maintaining itself contrary to the tendency toward disorder.

(b) To do these things, the system has to transform the ordered energy such as food, the sunshine and electricpower into the disordered energy in the form of heat. Consequently, this system can fill the requirement that the total amount of the disorder increases.

5. Essentially, science is a structure that is brought up by adding new material to the top of big buildings by former scholars. One scarcely has a chance to make contribution, who knows nothing about what is known at that time. So, when we begin new research plan, it is basically important to study completely the present situation of the theme.

■ 教育 数学 解答

1. **(i)** この関数 f には特異点はなく、また $r \to \infty$ で $f \to 0$ に収束する。f は有限の領域 ($\mathbf{R}^2$) に正負の値を持つので f は $\mathbf{R}^2$ 上に最大値、最小値を持つ。

さて、$\mathbf{R}^2$ は開集合なので、連続微分可能な関数 f がある点で最大値または最小値をとるためには、その点で、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

となることが必要条件である。具体的に書き下すと、

$$+x[x^2 - (x^4 - y^2)(x^2 + y^2)] = 0 \qquad \cdots (1)$$

$$-y[1 + 2(x^4 - y^2)(x^2 + y^2)] = 0 \qquad \cdots (2)$$

となる。

f が最大値を取るのは明らかに f が正の時であり、その時には $(x^4 - y^2) > 0$ なので式 (2) が満たされるためには $y = 0$ となることがわかる。これを式 (1) に代入すると、

$$4x^3(1 - x^4) = 0 \qquad \therefore \quad x = +1, 0, -1$$

が得られる。この時の f の値は

$$f(1,0) = f(-1,0) = \frac{1}{e} \quad f(0,0) = 0$$

なので、最大値は、

$$f(1,0) = f(-1,0) = \frac{1}{e}$$

である。

同様にして最小値を求めると、最小値は明らかに負なので $(x^4 - y^2) < 0$ なので式 (1) が満たされるためには $x = 0$ となることがわかる。これを式 (2) に代入すると、

$$2y(2y^4 - 1) = 0 \qquad \therefore \quad y = 0, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

が得られる。この時の f の値は

$$f\left(0, +\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = f\left(0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \qquad f(0,0) = 0$$

なので、最小値は、

$$f\left(0, +\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = f\left(0, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$$

である。

(ii) 与式を極座標の積分に直すと、

$$I = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(r^5 \cos^4\theta - r^3 \sin^2\theta\right) e^{-r^4} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

となる。θ による積分は、

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4\theta\right) \mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right) \mathrm{d}\theta = \pi$$

となる。r の積分は、$r^2 = t$ と変数変換して

$$I = \pi \int_0^\infty \left(\frac{3}{8}t^2 - \frac{1}{2}t\right) e^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{3\pi^{\frac{3}{2}}}{32} - \frac{\pi}{4}$$

と求まる。

2. **(i)** 正の方向に進む粒子は、dx 進む間に、$(a+b)F^+\mathrm{d}x$ 個が散乱によって失われ、$bF^-\mathrm{d}x$ 個が、負方向に進む粒子からの散乱によって生じる。負方向に進む粒子は $-\mathrm{d}x$ 進む間に同様の収支があるので結局

$$+\frac{\mathrm{d}F^+}{\mathrm{d}x} = -(a+b)F^+ + bF^-$$
$$-\frac{\mathrm{d}F^-}{\mathrm{d}x} = -(a+b)F^- + bF^+$$

となる。

(ii) 固有値 λ は

$$(-\alpha-\lambda)(\alpha-\lambda)+\beta^2 = \lambda^2-\alpha^2+\beta^2 = 0 \qquad \therefore \quad \lambda^\pm = \pm\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$$

となる。それぞれに対応する固有ベクトルの第 2 成分を $\gamma^\pm$ とすれば、

$$\begin{pmatrix} -\alpha & +\beta \\ -\beta & +\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^\pm \end{pmatrix} = \pm\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^\pm \end{pmatrix}$$

となるので、

$$\gamma^\pm = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta}$$

が得られる。よって固有ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ (\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2})/\beta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ (\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2})/\beta \end{pmatrix}$$

となる。ただし、複号の順序は、固有値と固有ベクトルのそれぞれで一致している。

(iii) $\alpha = a+b, \beta = b$ とすれば、(i) の方程式は、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} F^+ \\ F^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & +\beta \\ -\beta & +\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F^+ \\ F^- \end{pmatrix}$$

となる。この行列を対角化するために、

$$\begin{pmatrix} F^+ \\ F^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma^+ & \gamma^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F^{+\prime} \\ F^{-\prime} \end{pmatrix}$$

で変換すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} F^{+\prime} \\ F^{-\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^+ & 0 \\ 0 & \lambda^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F^{+\prime} \\ F^{-\prime} \end{pmatrix}$$

となる。よってこの解は

$$F^{+\prime}(x) = A^+e^{\lambda^+x} \qquad F^{-\prime}(x) = A^-e^{\lambda^-x}$$

であり、変換して

$$F^+(x) = A^+e^{\lambda^+x} + A^-e^{\lambda^-x}$$
$$F^-(x) = A^+\gamma^+e^{\lambda^+x} + A^-\gamma^-e^{\lambda^-x}$$

となる。境界条件 $F^+(0) = 1, F^-(1) = 0$ を用いて未定係数 A^+, A^- を定めて、さらに $\lambda^- = -\lambda^+ \equiv \lambda$、$\gamma^+\gamma^- = 1$ の関係を用いると、結局

$$F^+(x) = \frac{\gamma^-e^{\lambda^-+\lambda^+x} - \gamma^+e^{\lambda^++\lambda^-x}}{\gamma^-e^{\lambda^-} - \gamma^+e^{\lambda^+}} = \frac{\gamma^-e^{-\lambda(1-x)} - \gamma^+e^{+\lambda(1-x)}}{\gamma^-e^{-\lambda} - \gamma^+e^{+\lambda}}$$
$$F^-(x) = \frac{\gamma^+\gamma^-e^{\lambda^-+\lambda^+x} - \gamma^+\gamma^-e^{\lambda^++\lambda^-x}}{\gamma^-e^{\lambda^-} - \gamma^+e^{\lambda^+}} = \frac{e^{-\lambda(1-x)} - e^{+\lambda(1-x)}}{\gamma^-e^{-\lambda} - \gamma^+e^{+\lambda}}$$

となる。

3. **(i)** $4 = 1+1+1+1 = 2+1+1 = 3+1 = 2+2$ だから、$P(4) = 5$
$5 = 1+1+1+1+1 = 2+1+1+1 = 3+1+1 = 4+1 = 2+2+1 = 3+2$ だから、$P(5) = 7$

(ii) $p(n, m)$ は m 以下の数で n を分割する種類の数であるが、分割した項の中で一番大きい数が k であるような分割の種類の数は、残りの和が $n-k$ で k 以下の数で分割する分割の種類の数 $p(n-k.k)$ であるので、よって

$$p(n, m) = \sum_{k=1}^{m} p(n-k.k)$$

と表されることになる。

(iii) (ii) で得られた公式を使って順に計算していく。

$$\begin{aligned} p(8) &= p(8, 8) \\ &= p(7, 1) + p(6, 2) + p(5, 3) + p(4, 4) + p(3, 5) + p(2, 6) + p(1, 7) + p(0, 8) \\ &= 1 + \{p(5, 1) + p(4, 2)\} + \{p(4, 1) + p(3, 2) + p(2, 3)\} + 5 + 3 + 2 + 1 + 1 \\ &= 1 + (1+3) + (1+2+2) + 5 + 3 + 2 + 1 + 1 \\ &= 22 \end{aligned}$$

(iv) 与えられている $p(n, 2)$ の母関数の右辺の表式を展開して、x の各次数ごとを眺めると

$x^0 : 1$
$x^1 : x^1$
$x^2 : x^2 + x^{1+1}$
$x^3 : x^{2+1} + x^{1+1+1}$

のように x の指数は分割の仕方を示していることがわかる。
これをヒントに整数 n の一般の分割を考える。
整数 n の和分割で、整数 $m\,(m = [1, \infty))$ の数の項の数を a_m とと表すことにする。この分割を x の指数で示すと

$$x^n = x^{1a_1+2a_2+3a_3+\cdots} = x^{1a_1} x^{2a_2} x^{3a_3} \cdots$$

となる。これを逆に考えると、任意の数の組 $\{a_m\}\,(m = [1, \infty))$ は、上式で計算される n の分割の一例になっている。
ここで $p(n, 2)$ の例を思い出して

$$(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)\cdots$$

という式を考える。これを展開すると x の n 次の項の係数は n の分割の種類の数となっている。すなわち、これは $P(n)$ の母関数である。

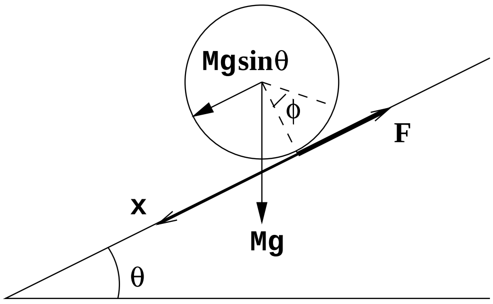
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P(n) x^n &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)\cdots \\ &= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}\cdots = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k} = \prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{k+1}} \end{aligned}$$

となる。よって

$$f_k(x) = 1 - x^{k+1}$$

と求まる。

■ 教育 物理 解答



1. 問題の状況は右図の様である。

(i) 重心の運動方程式は次の通りである。

$$M\ddot{x} = Mg\sin\theta - F$$

(ii) 円盤の密度を $\rho = M/\pi R^2$ として慣性モーメント I は

$$I = \int_0^R \rho r^2 \cdot 2\pi r \cdot \mathrm{d}r = 2\pi\rho\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}MR^2$$

となる。回転の運動方程式は、図の反時計回りを回転角速度 ω の正の向きとして、

$$I\dot{\omega} = FR \qquad \therefore \quad \frac{1}{2}MR^2\dot{\omega} = FR$$

(iii) すべりがないので明らかに次式が成り立つ。

$$v = R\omega$$

(iv) 前問での結果を総合して、摩擦力 F を消去すると、

$$\dot{v} = \frac{2}{3}g\sin\theta$$

を得る。摩擦があるときは摩擦がないときの $\frac{2}{3}$ 倍の加速度をもつことになる。

2. **(i)** ループを貫く磁束を Φ としたとき、起電力 V は Faraday の電磁誘導の法則より、

$$V = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

である。起電力の向きは磁場に対して右向きであるが、問題の図ではループの反時計回りである。
磁束の変化分はループのうち y 軸と並行な上側の金属線が通過する磁束である。金属線の速度 v が負の値であることに注意して $\mathrm{d}\Phi = BvL\mathrm{d}t$ よって起電力は

$$V = -BvL \quad (>0)$$

ループの抵抗 R は $R = \rho 4L/s$ と表される。流れる電流 I は

$$I = \frac{V}{R} = -\frac{Bsv}{4\rho} \quad (>0)$$

電流は図では反時計回りに流れる。

(ii) z 軸に平行な線にかかる力は相殺し、z 軸に垂直な線に働く力のみが残る。

$$F = IBL = -\frac{B^2 sLv}{4\rho}$$

この力は上向きである。

(iii) ループの質量 m は $m = 4Lsd$ と表される。運動方程式は

$$m\dot{v} = F - mg$$

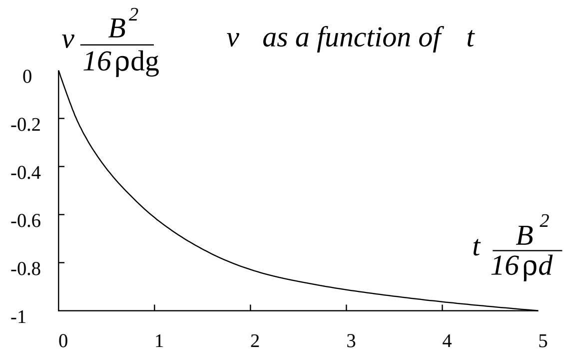
(iv) 前問で得られた運動方程式を整理して

$$\dot{v} = -\frac{B^2}{16\rho d}v - g$$

となる。これを初期条件 $v(0) = 0$ のもとで解くと、

$$v = \frac{16\rho dg}{B^2}\left[\exp\left(-\frac{B^2}{16\rho d}t\right) - 1\right]$$

この v の時間変化は右図の様である。



3. **(i)** 全内部エネルギー U は

$$U = u(T) \times V = 3pV \qquad \therefore \quad \mathrm{d}U = 3(p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p)$$

断熱過程であるので

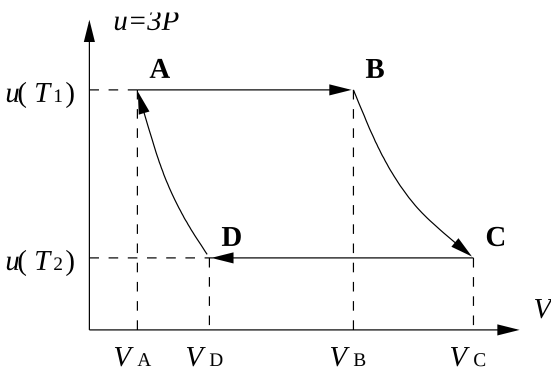
$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q' - p\mathrm{d}V = -p\mathrm{d}V$$

よって、

$$4p\mathrm{d}V + 3V\mathrm{d}p = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{4}{3}\frac{\mathrm{d}V}{V} = -\frac{\mathrm{d}p}{p} \quad \rightarrow \quad \frac{4}{3}\log V = -\log p + c$$

$$\therefore \quad pV^{4/3} = \mathrm{const}$$

(ii) 等温過程で $u(T)$ は一定なので p も一定となる。$p - V$ 図は右図の通り。



(iii) 等温過程では p が一定 $\mathrm{d}p = 0$ なので

$$\mathrm{d}U = 3p\mathrm{d}V$$

となる。また流入する微小熱量を $\mathrm{d}Q'$ として

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q' - p\mathrm{d}V$$

よって

$$\mathrm{d}Q' = 4p\mathrm{d}V$$

これより流入する熱量は体積の差に比例することがわかる。熱量 Q_1, Q_2 は以下の通り。

$$Q_1 = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}Q' = 4p(V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}}) = \frac{4}{3}u(T_1)(V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}}) \quad > 0 \quad 吸熱$$

$$Q_2 = \frac{4}{3}u(T_2)(V_{\mathrm{D}} - V_{\mathrm{C}}) \quad < 0 \quad 廃熱$$

(iv) 可逆なのでエントロピー収支は 0 である。すなわち、

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

前問の結果を代入して

$$\frac{4}{3}\frac{u(T_1)(V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}})}{T_1} + \frac{4}{3}\frac{u(T_2)(V_{\mathrm{D}} - V_{\mathrm{C}})}{T_2} = 0$$

設問 (i) で示された定理から

$$u(T_1)V_{\mathrm{A}}^{4/3} = u(T_2)V_{\mathrm{D}}^{4/3} \qquad u(T_1)V_{\mathrm{B}}^{4/3} = u(T_2)V_{\mathrm{C}}^{4/3}$$

が得られ、これから $V_{\mathrm{C}}, V_{\mathrm{D}}$ を $V_{\mathrm{A}}, V_{\mathrm{B}}$ で表わしたものを代入すると

$$\frac{u(T_1)}{T_1} - \frac{u(T_2)}{T_2}\left(\frac{u(T_1)}{u(T_2)}\right)^{3/4} = 0$$

となり、これにより

$$\frac{u(T_1)^{1/4}}{T_1} = \frac{u(T_2)^{1/4}}{T_2}$$

が示される。