

1993 年度 入学試験 物理専門科目

専攻 問題 1

質量 m 、電荷 e をもつ一次元の調和振動子がある。時刻 $t = 0$ に一定一様な電場 $F(> 0)$ が急激に印加されたとき、以下の間に答えよ。ただし、ハミルトニアンは

$$H = \begin{cases} \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} & (t < 0) \\ \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} - eFx & (t \geq 0) \end{cases}$$

であり、 $p = -i\hbar \frac{d}{dx}$ である。また必要ならば問題末の式を証明無しに用いてよい。

1. $t < 0$ のハミルトニアンに対応する定常状態について、
 - (i) シュレーディンガー方程式を解き、エネルギー固有値 ε_n と固有関数 $\psi_n(x)$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) を求めよ。
 - (ii) 横軸を x 、縦軸をエネルギーとして、ポテンシャルの概形を描き、基底状態を含め下から三番目までのエネルギー準位を図中に記入せよ。さらに、それぞれの準位に対応した固有関数の概形を描け。
2. $t \geq 0$ のハミルトニアンに対応する定常状態について、
 - (i) ポテンシャルの概形を設問 1 で描いた図中に記入せよ。
 - (ii) シュレーディンガー方程式を解き、エネルギー固有値 E_n と固有関数 $\varphi_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を求めよ。
3. $t < 0$ で基底状態にいた調和振動子の $t \geq 0$ での状態・運動を考える。
 $t \geq 0$ のハミルトニアンのもとで波動関数は、

$$\psi(x, t) = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} \psi(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(x) e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}, \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x)$$

に従って時間発展する。ここで、 E_n は $t \geq 0$ でのエネルギー固有値、 $\varphi_n(x)$ は固有関数、 A_n は $\psi(x, 0)$ を $\varphi_n(x)$ で展開したときの展開係数である。またこの時の初期状態 $\psi(x, 0)$ は、 $t < 0$ での基底状態 $\psi_0(x)$ である。

- (i) $t \geq 0$ で n 番目の固有状態にいる確率を求めよ。また、この確率はどのような確率分布に従うか述べよ。
- (ii) $t \geq 0$ で粒子の存在確率 $|\psi(x, t)|^2$ が最大の位置 $x_{\max}(t)$ はどのように時間発展するか調べよ。また、古典的な一次元調和振動子の運動と比較してみよ。

(参考) エルミート多項式

定義 $H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

微分方程式 $\left[\frac{d^2}{dz^2} - 2z \frac{d}{dz} + 2n \right] H_n = 0$

母関数 $e^{-s^2 + 2sz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} H_n(z)$

直交性 $\int_{-\infty}^{+\infty} dz H_n(z) H_m(z) e^{-z^2} = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm}$

専攻 問題 2

z 方向に一様で断面の形が一定な中空の導体管内を z 方向に伝播する電磁波を考える (図 1)。真空の誘電率を ϵ_0 、真空の透磁率を μ_0 とする時、以下の設問に答えよ。

1. ある境界条件のもとで Maxwell 方程式に従う電場、磁場をそれぞれ

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x, y) \exp\{i(kz - \omega t)\} \quad \vec{H} = \vec{H}_0(x, y) \exp\{i(kz - \omega t)\} \quad \dots (1)$$

とし

$$\vec{E}_0 = (E_x, E_y, E_z) \quad \vec{H}_0 = (H_x, H_y, H_z)$$

と置く時、 E_x, E_y, H_x, H_y を $\frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_z}{\partial y}, \frac{\partial H_z}{\partial x}, \frac{\partial H_z}{\partial y}$ で表せ。

2. E_z, H_z がそれぞれ満たす二階偏微分方程式を求めよ。又、このような導体管内を伝播する電磁波は、TM 波と TE 波に分けて考えることができる。その理由を述べよ。但し、TM 波とは進行方向の磁場成分が 0 であるような電磁波であり、TE 波とは進行方向の電場成分が 0 であるような電磁波である。
3. 図 2 のように、断面が長方形 ($a > b$) の時、 ω と k との関係を求めよ。又、位相速度を $v_p (= \omega/k)$ 、群速度を $v_g (= \partial\omega/\partial k)$ とする時

$$v_p \cdot v_g = c^2$$

である事を示せ。但し、 $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ である。

4. 前問で最小の ω を与える電場、磁場を求めよ。
5. 電磁波の進行方向に一定の間隔 L で同じ形の導体板を取り付けた (図 3)。この時の ω と k の関係について議論せよ。
ヒント: $E(z)$ が解である時、 $E(z + L)$ も解である事を使え。

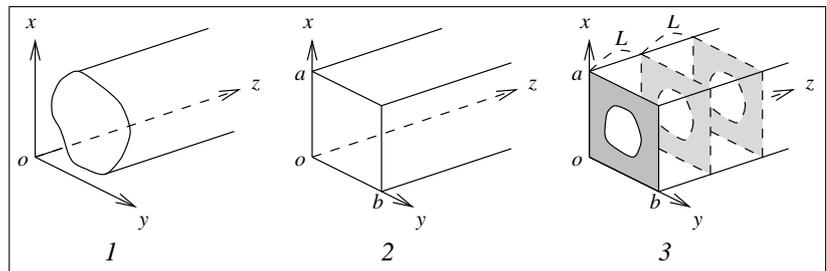
(参考) Maxwell 方程式は次のように書くことができる。

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad \dots (2)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \dots (3)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \dots (4)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \dots (5)$$



但し、 $\vec{D}, \vec{E}, \vec{B}, \vec{H}$ はそれぞれ電束密度、電場、磁束密度、磁場 (磁場の強さ) である。また ρ, \vec{j} はそれぞれ電荷密度、電流密度である。

専攻 問題 3

スピン 1 の強磁性イジング模型

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} J_{ij} I_i I_j + \sum_i D I_i^2 \quad (I_i, I_j = +1, 0, -1)$$

を考える。ここで、 I_i は i 番目の原子のスピン、 D は結晶場の効果を表すパラメータ、 J_{ij} は I_i と I_j の間の交換相互作用であり、最近接原子間では $J_{ij} = J (J > 0)$ 、それ以外は $J_{ij} = 0$ とする。この系の相転移を分子場近似で考察する。各原子のまわりの最近接原子の数を z 、ボルツマン定数を k とし、以下の問に答えよ。

1. i 番目の原子に着目すると、 I_i に対する有効ハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_i = -B_{\text{eff}} I_i + D I_i^2$$

と書ける。 i 以外の原子 j のスピンの平均磁化 $M = \langle I_j \rangle$ で置き換えたとき、 B_{eff} を z, J, M で表せ。さらに、 B_{eff} の物理的意味を記せ。

2. \mathcal{H}_i の固有値を用いて、温度 T における I_i の平均 $\langle I_i \rangle$ を M で表せ。
 3. $\langle I_i \rangle = M$ と置くことにより、 M を与える式が得られる。このとき、

(i) $D/(zJ) \rightarrow -\infty$

(ii) $D/(zJ) = 0$

(iii) $D/(zJ) \rightarrow +\infty$

のそれぞれの場合について、 $M = 0$ (常磁性状態) の他に $M \neq 0$ (強磁性状態) の解が存在するかどうかを議論し、存在する場合にはその臨界温度 T_c を求めよ。

4. D を $D = 0$ から増加させると、ある臨界的な値 $D_t > 0$ を境として、常磁性と強磁性間の相転移が二次から一次に変化する。そのような D_t と転移温度 T_t を求めよ。(ヒント： $\langle I_i \rangle$ を M に関して 3 次まで展開し、その係数の符号を議論せよ。)
 5. 横軸 D 、縦軸 T の平面における相図を図示せよ。ただし、境界を与える曲線の方程式などを具体的に求める必要はなく、非常に定性的なものでよい。

専攻 問題 4

1. 重陽子 d は陽子 p と中性子 n からなる原子核である。その基底状態は結合エネルギー 2.2 MeV で弱く束縛されており、その核スピン \vec{I} の値 I は 1 である。また、 p と n のもつスピン角運動量の和を S 、軌道角運動量の和を L とすると $I = L + S$ 、 $S = 1$ 、 $L = 0, 2$ であることが知られている。(なお、角運動量の単位は \hbar である。) 以下の問において、必要なら、下表の値を使ってよい。

	p	n	d (基底状態)
スピン	$1/2$	$1/2$	1
磁気モーメント (単位: μ_N)	2.793	-1.913	0.857
電氣的 4 重極モーメント (cm^2)	0	0	0.274×10^{-26}

但し、 μ_N (核磁子) $= e\hbar/(2M_p c)$ M_p : 陽子の静止質量

- (i) 二核子系のうちで束縛状態をもつのは p - n 系 (重陽子) のみで、 p - p 系、 n - n 系には束縛状態はない。他方、核力の荷電不変性 (p - p , p - n , n - n 間の核力は同じスピン及びパリティ状態においては同等である) は良い精度で成り立つことが知られている。この二つの事実は矛盾しないことを示せ。
- (ii) 重陽子の基底状態においては、主に $L = 0$ (S 状態) であるが、小さな確率で $L = 2$ の状態 (D 状態) が混ざっている。上の表を参照して、 D 状態の存在の証拠と考えられることを二つ挙げ、理由を示せ。
- (iii) 水素原子及び重水素原子を考える。 g_I を陽子あるいは重陽子の g 因子、 α を両原子について同一の比例定数とすると、電子 (スピン \vec{J}) と原子核 (スピン \vec{I}) との間に $\alpha g_I \vec{J} \cdot \vec{I}$ に等しい相互作用が働くため、原子のもつ全角運動量 \vec{F} ($\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$) の大きさによって原子のエネルギー準位がわかれる (超微細構造)。 $\vec{J} \cdot \vec{I}$ の期待値を F, J, I (それぞれ、スピン $\vec{F}, \vec{J}, \vec{I}$ の大きさ) で表せ。
 $J = 1/2$ の時、水素原子は $F = 0, 1$ 、重水素原子は $F = 1/2, 3/2$ の値を持つ。異なる F の値をもつ準位間のエネルギー差は、水素原子の場合 $5.9 \times 10^{-6} \text{ eV}$ である。重水素原子の場合の同様なエネルギー差を有効数字 1 桁で求めよ。
2. 図 1 は、紙面に垂直に一様に磁場をかけたとき、 α 線、 β 線、 γ 線の描く軌道を模式的に示したものである。 α 崩壊、 β 崩壊、 γ 崩壊のいずれにおいても、崩壊の始状態と終状態は一つであるとする。以下の問に答えよ。

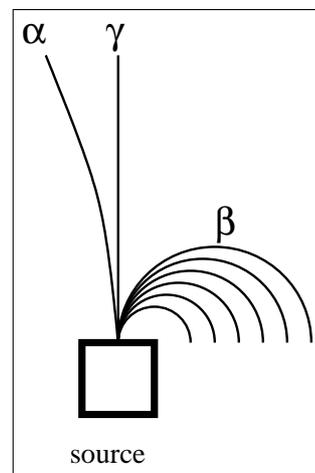
- (i) 磁場の向きや各放射線の基本的性質について、図 1 から分かることを簡潔に記せ。

- (ii) α 崩壊の Q 値 (崩壊の始状態と終状態の静止質量の差) を 5 MeV 、 γ 崩壊の遷移エネルギーを 1 MeV とする。 α 崩壊あるいは γ 崩壊により、終核に与えられる反跳エネルギーはそれぞれいくらか。有効数字 1 桁で答えよ。但し、崩壊する核 (親核) の質量数をいずれの場合も 200 、核子の静止質量を 940 MeV とせよ。

- (iii) β 崩壊においては、静止質量がゼロか非常に小さい反電子ニュートリノ ($\bar{\nu}_e$) も放出される。

図 1 において、 β 線がさまざまな軌道を示すのは、 $\bar{\nu}_e$ の存在の影響である。その理由を説明せよ。

$\bar{\nu}_e$ の存在の直接的な実験的検証は、 $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$ 反応によって生じる陽電子 e^+ と中性子 n を同時に検出することにより行なわれた。 e^+ および n を実験的に検出する方法を考え、その原理を簡潔に記せ。



専攻 問題 5

固体結晶内の電子について次の問に答えよ。

1. 結晶内で周期的に変化するポテンシャル場 $U(\vec{r})$ の中を運動する電子に対するシュレーディンガー方程式

$$H\Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right) \Psi = E\Psi, \quad U(\vec{r} + \vec{R}) = U(\vec{r})$$

の固有関数 $\Psi(\vec{r})$ は、 \vec{k} を波数ベクトルとすると

$$\Psi(\vec{r} + \vec{R}) = e^{i\vec{k}\vec{R}}\Psi(\vec{r}) \quad \dots (1)$$

という性質 (ブロッホの定理) を持つことを示せ。ただし、 m は電子質量で、 \vec{R} は格子ベクトルで基本ベクトル \vec{d}_i と整数 $n_i (i = 1, 2, 3)$ を用いて $\vec{R} = n_1\vec{d}_1 + n_2\vec{d}_2 + n_3\vec{d}_3$ と表される。

2. 一次元空間において異なる二種類の原子 A と B がそれぞれ $x = na, na + b$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, 0 < b < a$) の位置に交互に並んだ二原子結晶において、強く原子に束縛された電子のエネルギーバンドを求めることを考える。A 原子と B 原子が孤立した時に電子が受けるポテンシャルをそれぞれ $U_A(x), U_B(x)$ 、その時の原子軌道関数を $\phi_A(x), \phi_B(x)$ (共に実数とする)、固有エネルギーを E_A, E_B とし、結晶のハミルトニアンを

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) \quad U(x) = \sum_n U_A(x - na) + \sum_n U_B(x - na - b)$$

とする。原子間の相互作用としては隣り合う原子間のポテンシャルを介した相互作用のみを考え、隣り合う原子軌道関数同士の単なる重なり積分 (非直交性) は無視するものとする。

- (i) 各原子の波動関数を用いて近似した線形結合の式

$$\Psi_A(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{ikna} \phi_A(x - na) \quad \Psi_B(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{ikna} \phi_B(x - na - b)$$

はブロッホの条件式 (1) を満足することを示せ。ただし、 N は結晶全体に含まれる単位格子の数である。

- (ii) ハミルトニアン H の Ψ_A, Ψ_B に対する行列要素

$$H_{AA}, H_{BB}, H_{AB}, H_{BA}$$

を求めよ。ただし、隣り合う軌道関数同士の重なり積分を無視するときは

$$\begin{aligned} \gamma &\equiv \int dx \phi_A(x) U_A(x) \phi_B(x - b) = \int dx \phi_A(x) U_B(x - b) \phi_B(x - b) \\ &= \frac{1}{2} \int dx \phi_A(x) \{U_A(x) + U_B(x - b)\} \phi_B(x - b) \\ \gamma' &\equiv \int dx \phi_A(x) U_A(x) \phi_B(x + a - b) = \int dx \phi_A(x) U_B(x + a - b) \phi_B(x + a - b) \\ &= \frac{1}{2} \int dx \phi_A(x) \{U_A(x) + U_B(x + a - b)\} \phi_B(x + a - b) \end{aligned}$$

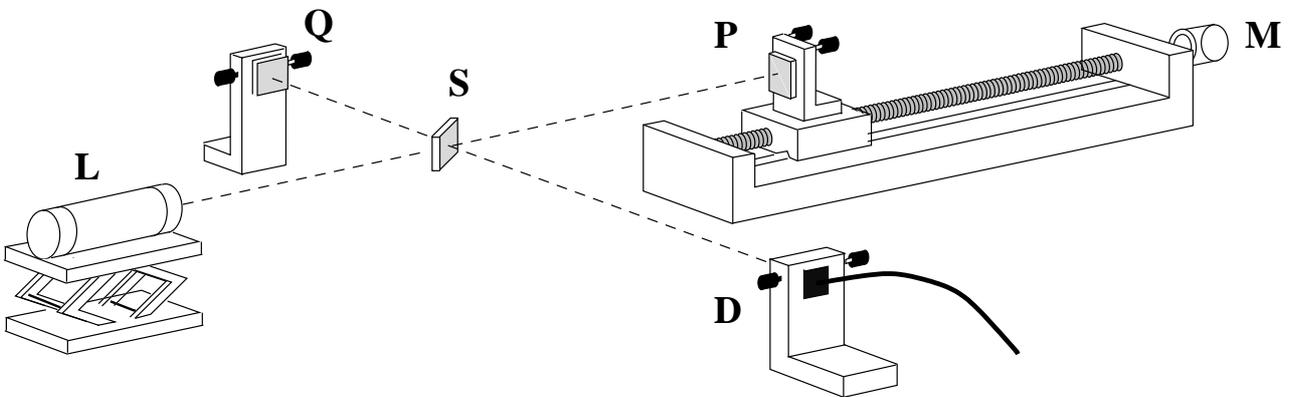
としてよい。

- (iii) $E_A, E_B, \gamma, \gamma'$ を用いて固有エネルギー $E(k)$ を求めよ。エネルギーバンドの図を横軸を波数 k 、縦軸をエネルギー $E(k)$ として描け。
- (iv) エネルギーバンドのギャップと各バンドの幅を求めよ。
- (v) 第一ブリルアン域 ($-\pi/a \leq k < \pi/a$) の中に含まれる全状態数はどれだけか、また、A, B 原子が各一個ずつ電子を持つ時、電子はバンド内にどのように分布するか。

専攻 問題 6

図は、レーザー光源を用いたマイケルソン型光干渉計である。Lは周波数の安定な出力1 mWのHe-Neレーザー光源(波長 $0.63\mu\text{m}$)、P、Qはそれぞれ高い反射率の平面鏡、Sは半透鏡、Dは光検出器(一個の光子が入ると外部回路に一個の電子を流し得る電流源素子)である。これらは、Sを除き、それぞれ、干渉信号を得られるように、調整機構を備えた保持具に取り付けられている。図に示すノブで変位または角度の自由度が調整できる。また、鏡Pは、モーターMにより、光源の方向に動かせるとする。これらの保持具は、実験台にネジで固定されており、全体の大きさは1 m程度である。光速は $3.0\times 10^8\text{ m/s}$ 、プランク定数 h は、 $6.6\times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}$ 、電子の電荷は、 $1.6\times 10^{-19}\text{ C}$ として、以下の設問に答えよ。

1. Sで分けられた光が、それぞれP、Qで反射して、再びSで合わさると、干渉を起こし、Dには、干渉信号が現れる。干渉信号を得るために、Sに最低限必要な調整自由度を持つ保持具を考え、図示せよ。
2. Dに 50Ω の抵抗を接続する。光の強度を強め合う干渉がおきている時の抵抗の両端の電圧を評価せよ。また、Pの変位の微小変化に対し、出力電圧の変化が最大になるようにPの位置を設定した時、そのまわりで、Pの位置変化1 nmに対する出力電圧の変化を評価せよ。
3. Pがある時刻から急に 10 m/s^2 の加速度で外向きに運動し始めたとする。Pの速度が 10 cm/s のときの干渉信号は、どのようなものか。また、この干渉信号の時間変化を測定・記録するために考えられる測定器・装置を図解し、必要な性能を述べよ。
4. マイケルソンらは、この種の干渉計(SQ又はSP間の距離約11 m)を静かな地下室に設置して、干渉信号をモニターすることにより、光速度が光源の速度に依存しないことを100分の1程度の精度で示した。その原理を簡潔に説明し、この精度を決めている実験的要因を論ぜよ。ただし、地球の太陽周りの公転運動の周速度は、約 30 km/s である。



専攻 問題 7

1. 温血動物の細胞内のイオン組成は、細胞外液 (例えば血液) のイオン組成とは大きく異なっている。一価の無機イオンに関して表 1 にモル濃度で示す。

- (i) 神経細胞や筋肉細胞のように電氣的に「興奮」し、活動電位を生じる細胞では、静止時の細胞内電位は細胞外に対して負である。これは静止時の細胞が K^+ に対してのみ高い透過性を示し、 K^+ の濃淡電池とみなせるからである。静止時の細胞内電位を表 1 に基づいて計算せよ。但し、ガス定数を R 、ファラデー定数を F とするとき、

$$\frac{RT}{F \log_{10} e} = 60\text{mV}$$

を用いよ。

- (ii) 活動電位を生じる時は、細胞内電位は一過性に正となる。この時、細胞膜の一価性のイオンの透過性はどのように変化していると考えられるか、三行以内で簡潔に述べよ。
- (iii) 一価性イオンの細胞内外の濃度勾配を表 1 のように変化させ、細胞を「充電」状態に保っている機構について、三行以内で簡潔に述べよ。
- (iv) 細胞内外の濃度勾配はある二価の陽イオンに関して特に著名である。この陽イオンについて、その細胞活性制御の働きに触れつつ述べよ。

表 1

	細胞内 (mol/l)	細胞外 (mol/l)
K^+	0.100	0.005
Na^+	0.010	0.150
Cl^-	0.010	0.155

2. タンパク質のアミノ酸配列は、DNA の塩基配列が先ず RNA に転写され、これが遺伝暗号表にしたがって翻訳されて、決定される。表 2 に示した RNA → アミノ酸の暗号表を参考にして次の問題に答えよ。

- (i) 暗号表やタンパク質のアミノ酸組成はあまり生物種によらないが、DNA の塩基組成は、種によって大きく異なる。たとえば、高温に耐える生物では、Cytosine(C) や Guanine(G) が多く、低温に生きる生物では Adenine(A) や Thymine(T) が多い。

●このようなアミノ酸組成と DNA 塩基組成の配列は暗号表のどのような性質に基づいているか。

●DNA の塩基組成の上記のような多様性の理由は何か。

- (ii) 第一塩基と第二塩基が同じアミノ酸 (例えば、Phe と Leu、Ile と Met、Asp と Glu、Ser と Arg) は互いに類似している。

●上記 4 つの組は、それぞれどのような点で類似しているか。

●上記のような暗号表の性質は、どのような点で生物に有利か。

表 2

First position (5' end)	Second position				Third position (3' end)
	U	C	A	G	
U	Phe	Ser	Tyr	Cys	U
	Phe	Ser	Tyr	Cys	C
	Leu	Ser	Stop	Stop	A
	Leu	Ser	Stop	Trp	G
C	Leu	Pro	His	Arg	U
	Leu	Pro	His	Arg	C
	Leu	Pro	Gln	Arg	A
	Leu	Pro	Gln	Arg	G
A	Ile	Thr	Asn	Ser	U
	Ile	Thr	Asn	Ser	C
	Ile	Thr	Lys	Arg	A
	Met	Thr	Lys	Arg	G
G	Val	Ala	Asp	Gly	U
	Val	Ala	Asp	Gly	C
	Val	Ala	Glu	Gly	A
	Val	Ala	Glu	Gly	G

専攻 問題 8

- 図 1 は三次元的な黒とかげと白とかげがひしめきあって、平面の上に規則正しく並んでいる様を真上から見た図である。これが無限に広がっていると見なし、どのような三次元的対称操作が含まれているかを略記せよ。また対称操作を特徴付ける要素を、問題 8 用の特別解答用紙の付図の中に図示せよ。
- 図 1 の中には、鏡映 $((x, y, z) \rightarrow (x, y, -z))$ などと反転 $((x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z))$ の三次元的対称操作はない。同じように、タンパク質分子や、その結晶についても、鏡映と反転操作はない事が知られている。それはなぜかを考え、タンパク質の構成要素であるアミノ酸残基や、二次構造の特色に触れつつ述べよ。
- タンパク質結晶の X 線回折パターンは、タンパク質分子構造 $\rho(x, y, z)$ の三次元的フーリエ変換 $F(X, Y, Z)$ 自身ではなく、その強度 $|F(X, Y, Z)|^2$ をあたえる。このことは、 $F = |F| \exp(i\alpha)$ とする時、 F の位相角 α についての情報が失われたことを意味する。これを位相問題と呼ぶ。位相問題を克服するには、いくつかの方法があるが、タンパク質のように、分子量が 20,000 を越えるものでは、重原子同型置換法が有効である。この方法では、タンパク質そのものの結晶の X 線回折パターン $|F|^2$ の情報と、タンパク質の特定の場所 (例えば、 (x_1, y_1, z_1)) に重原子を付加的に結合させた結晶の X 線回折パターン $|F_H|^2$ の情報を組み合わせて位相角を求めようとする。
 - どのように、2 種類の X 線回折パターンの情報を組み合わせるのかを図示しつつ述べよ。但し、重原子を付加したタンパク質構造を $\rho_H(x, y, z)$ とし、そのフーリエ変換を $F_H(X, Y, Z)$ とし、重原子の付加した位置を (x_1, y_1, z_1) とし、重原子のみのフーリエ変換を $f_H(X, Y, Z)$ とせよ。また、フーリエ変換の定義としては、

$$F(X, Y, Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y, z) \exp\{2\pi i(Xx + Yy + Zz)\} dx dy dz$$

を用いよ。また同型置換とは、数式的には $F_H = F + f_H$ と表現できることに留意せよ。

- 上記の $|F|^2$ と $|F_H|^2$ の 2 種類の情報からは、位相角を二つの値に限定できるが、一意的には決定できない。一意的決定には、別の場所に重原子を付加した結晶の回折パターンが必要である。その理由を述べよ。



専攻 問題 1 解答

1. (i) シュレディンガー方程式は

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \psi_n(x) = \varepsilon_n \psi_n(x)$$

長さの次元を持つ量 λ を用いて、方程式を無次元化することを考える。つまり

$$\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad y = x/\lambda$$

とにおいて、シュレディンガー方程式を書き直す。すると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y^2 \right) \psi_n(\lambda y) = -\frac{2\varepsilon_n}{\hbar\omega} \psi_n(\lambda y)$$

となる。この方程式は $y \rightarrow \infty$ の極限で

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y^2 \right) \psi_n(\lambda y) = 0$$

に帰着し、その漸近解は $\psi_n(\lambda y) = e^{\pm y^2/2}$ だから、($y \rightarrow \infty$ の極限で波動関数が発散しないことを要求して)

$$\psi_n(\lambda y) = e^{-y^2/2} \phi_n(y)$$

とおく。 ψ についての方程式を ϕ についての方程式に書き直すと

$$\phi_n''(y) - 2y\phi_n'(y) + \left(\frac{2\varepsilon_n}{\hbar\omega} - 1 \right) \phi_n(y) = 0$$

これはエルミート多項式の満たす微分方程式だから、ただちに

$$\phi_n(y) = N_n H_n(y), \quad \varepsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

を得る。つまり

$$\psi_n(x) = N_n e^{-x^2/2\lambda^2} H_n(x/\lambda), \quad \varepsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

となる。ただし

$$\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad \frac{1}{2} m\omega^2 \lambda^2 = \frac{1}{2} \hbar\omega \quad (\text{すなわち零点振動の古典的半径})$$

N_n は規格化条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_n(x) \psi_n(x) = N_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d(\lambda y) e^{-y^2} H_n(y) H_n(y) = N_n^2 \lambda \sqrt{\pi} 2^n n! = 1$$

から、

$$N_n = (\lambda \sqrt{\pi} 2^n n!)^{-1/2}$$

(ii) $\lambda = 1$ で規格化した波動関数は

$$\psi_0(x) = \pi^{-1/4} e^{-x^2/2}$$

$$\psi_1(x) = \pi^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x^2/2} 2x$$

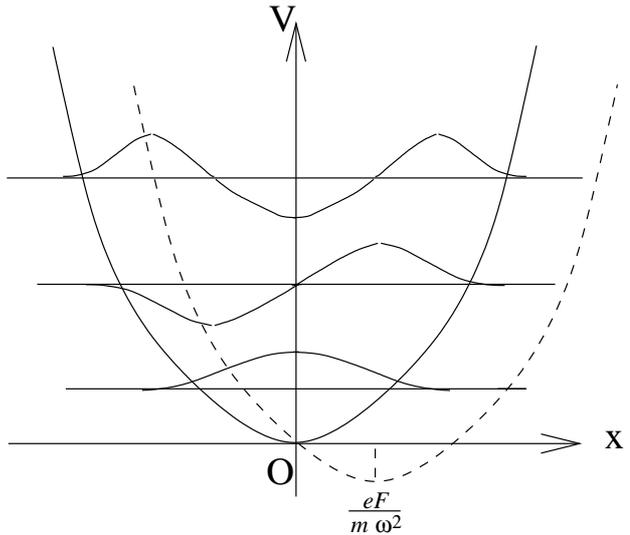
$$\psi_2(x) = \pi^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{8}} e^{-x^2/2} (4x^2 - 2)$$

$$\psi'_0(x) = -\pi^{-1/4} e^{-x^2/2} x$$

$$\psi'_1(x) = -\pi^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x^2/2} 2(x^2 - 1)$$

$$\psi'_2(x) = -\pi^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{8}} e^{-x^2/2} (4x^2 - 10)x$$

従って右図のようになる。



2. (i) ポテンシャルは前問の図の点線のようになる。

(ii)

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 \left(x - \frac{eF}{m\omega^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{e^2 F^2}{m\omega^2}$$

電場のかかったポテンシャルのつりあいの位置 $x_0 = \frac{eF}{m\omega^2}$ を座標原点に、 $\varepsilon = -\frac{1}{2} \frac{e^2 F^2}{m\omega^2} = -\frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2$ をエネルギー原点とすると設問 1 と同じになる。従って

$$\xi = x - x_0$$

$$\varepsilon_n = E_n - \varepsilon$$

とおくことにより 1(i) の場合と同様に解ける。答えは

$$\varphi_n(x) = N_n e^{-\xi^2/2\lambda^2} H_n(\xi/\lambda) \quad \xi = x - x_0, \quad x_0 = \frac{eF}{m\omega^2}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$N_n = (\lambda \sqrt{\pi} 2^n n!)^{-1/2} \quad E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \varepsilon, \quad \varepsilon = -\frac{1}{2} \frac{e^2 F^2}{m\omega^2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

となる。

3. (i) $\varphi_n(x)$ の直交性から、

$$\begin{aligned} A_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi_n(x) \psi(x, t=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi_n(x) \psi_0(x) \\ &= N_0 N_n \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{\xi^2}{2\lambda^2}} e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}} H_n(\xi/\lambda) H_0(x/\lambda) \end{aligned}$$

ここで

$$z = \frac{\xi}{\lambda}, \quad \frac{eF}{\lambda m \omega^2} = \alpha \quad (\lambda \text{ で規格化したつりあいの位置})$$

と定義すると、

$$\begin{aligned} A_n &= N_0 N_n \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\frac{z^2}{2}} e^{-\frac{(z+\alpha)^2}{2}} H_n(z) H_0(z+\alpha) \lambda \\ &= N_0 N_n \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\frac{\alpha^2}{4}} e^{-\frac{\alpha}{2} z - z^2} H_n(z) H_0(z+\alpha) \lambda \end{aligned}$$

$H_0(z) = 1$ を考慮すると

$$= N_0 N_n \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\frac{\alpha^2}{4}} e^{-\frac{\alpha}{2} z - z^2} H_n(z) \lambda$$

また、エルミート多項式の母関数から、 $s = -\frac{\alpha}{2}$ とすれば、

$$\exp\left(-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - z\alpha\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^n}{n!} H_n(z)$$

これを上の式に代入すると、

$$\begin{aligned} A_n &= N_0 N_n \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^k}{k!} H_k(z) e^{-z^2} H_n(z) \lambda \\ &= N_0 N_n \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \frac{\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^k}{k!} H_k(z) e^{-z^2} H_n(z) \lambda \\ &= N_0 N_n \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \frac{\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^k}{k!} \sqrt{\pi} 2^k k! \delta_{nk} \lambda \\ &= N_0 N_n e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \frac{\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^n}{n!} \sqrt{\pi} 2^n n! \lambda \\ &= e^{-\frac{\alpha^2}{4}} (-\alpha)^n \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \end{aligned}$$

つまり

$$|A_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}|^2 = |A_n|^2 = e^{-\frac{\alpha^2}{2}} (-\alpha)^{2n} \frac{1}{2^n n!} = e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^n \frac{1}{n!}$$

すなわち任意の時刻で系のエネルギーを測定するとエネルギー観測値の分布はポアソン分布となる。ただし

$$\alpha = \frac{eF}{\lambda m \omega^2}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

(ii) 3(i), 2(ii) の結果から、

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \sum_n e^{-\frac{\alpha^2}{4}} (-\alpha)^n \frac{1}{2^n n!} \frac{1}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\lambda^2}} H_n(z) e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t - i\frac{E_n}{\hbar}t} \\ &= e^{-\frac{i\omega t}{2} - i\frac{E_n}{\hbar}t} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sum_n \left(\frac{-\alpha}{2} e^{-i\omega t}\right)^n \frac{1}{n!} H_n(z) \end{aligned}$$

エルミート多項式の母関数より、

$$= e^{-\frac{i\omega t}{2} - i\frac{E_n}{\hbar}t} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4} e^{-2i\omega t} - \alpha e^{-i\omega t} z\right)$$

よって、 $|\psi(x, t)|^2$ は、

$$\begin{aligned} |\psi(x, t)|^2 &= e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \frac{1}{\lambda \sqrt{\pi}} e^{-z^2} \exp\left(\frac{-\alpha^2}{2} \cos 2\omega t - \alpha 2z \cos \omega t\right) \\ &= \frac{1}{\lambda \sqrt{\pi}} \exp\left(-(\alpha \cos \omega t + z)^2\right) \end{aligned}$$

すなわち波動関数は中心 $z = -\alpha \cos \omega t$ のガウス分布となる。 x で表せば

$$x_{\max}(t) = \lambda \alpha (1 - \cos \omega t) = \frac{eF}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t)$$

これは $t = 0$ で原点に静止していた古典粒子の $t \geq 0$ のときのポテンシャル中における運動と一緒にである。

専攻 問題 2 解答

1. 与えられた電場、磁場の式 (1) を $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{j} = 0$ の条件のもと、Maxwell 方程式 (3)、(5) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - ikE_y &= +i\mu_0\omega H_x \cdots (A) & \frac{\partial H_z}{\partial y} - ikH_y &= -i\epsilon_0\omega E_x \cdots (C) \\ ikE_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= +i\mu_0\omega H_y \cdots (B) & ikH_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -i\epsilon_0\omega E_y \cdots (D) \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= +i\mu_0\omega H_z \cdots (E) & \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= -i\epsilon_0\omega E_z \cdots (F) \end{aligned}$$

を得る。

$$\begin{aligned} (A) \times \epsilon_0\omega + (D) \times k & \quad \text{より} \quad H_x = i \frac{k \frac{\partial H_z}{\partial x} - \epsilon_0\omega \frac{\partial E_z}{\partial y}}{(\omega/c)^2 - k^2} \\ (A) \times k + (D) \times \mu_0\omega & \quad \text{より} \quad E_y = i \frac{k \frac{\partial E_z}{\partial y} - \mu_0\omega \frac{\partial H_z}{\partial x}}{(\omega/c)^2 - k^2} \\ (B) \times (-\epsilon_0\omega) + (C) \times k & \quad \text{より} \quad H_y = i \frac{k \frac{\partial H_z}{\partial y} + \epsilon_0\omega \frac{\partial E_z}{\partial x}}{(\omega/c)^2 - k^2} \\ (B) \times k + (C) \times (-\mu_0\omega) & \quad \text{より} \quad E_x = i \frac{k \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mu_0\omega \frac{\partial H_z}{\partial y}}{(\omega/c)^2 - k^2} \end{aligned}$$

2. (E), (F) より、

$$H_z = \frac{1}{i\mu_0\omega} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right), \quad E_z = -\frac{1}{i\epsilon_0\omega} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

これに 1 の結果を代入すると、

$$H_z = \frac{1}{(\omega/c)^2 - k^2} \frac{1}{\mu_0\omega} \left[k \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \mu_0\omega \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - k \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \mu_0\omega \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} \right]$$

整理して、

$$H_z = -\frac{1}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) H_z \quad \cdots (1)$$

同様にして

$$E_z = -\frac{1}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_z \quad \cdots (2)$$

上で得た方程式は H_z, E_z が混ざり合っていない方程式であり、かつ、 $H_z = 0, E_z = 0$ は解であるので TM 波、TE 波に分けて考えることができる。

3. 導体面上での電場と磁場の接続を考える。完全導体の場合、導体内の電場と磁場は 0 である。導体面と平行な成分を E_t, H_t 、垂直な成分を E_n, H_n とする。すると

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{より } E_t = 0 \\ \text{div } \vec{D} = \rho & \text{より } E_n = \omega_e / \epsilon_0 \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} & \text{より } H_t = j_{\perp} \\ \text{div } \vec{B} = 0 & \text{より } H_n = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \omega_e : \text{表面電荷密度} \\ j_{\perp} : \text{磁場と垂直な表面電流密度} \end{array}$$

となる。

TM 波の場合

$H_z = 0$ とおく。また、 $x = 0, y = 0$ での境界条件を考慮して $E_z = C \sin \xi x \sin \zeta y$ とおく。式 (2) に代入すると

$$\xi^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2$$

境界で $E_z = 0$ なので

$$\sin(\xi a) = 0 \quad \text{より} \quad \xi = \frac{n\pi}{a}, \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

$$\sin(\zeta b) = 0 \quad \text{より} \quad \zeta = \frac{m\pi}{b}, \quad (m = 1, 2, 3 \dots)$$

ここで $n = 0$ 及び $m = 0$ は $E_z = 0$ を与えるので除く。よって

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 = \left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2}\right)\pi^2 \quad \dots (3)$$

TE 波の場合

$E_z = 0, H_z = D \cos \xi x \cos \zeta y$ とおく。式 (1) に代入すると

$$\xi^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2$$

このとき

$$H_x = -i \frac{Dk\xi}{(\omega/c)^2 - k^2} \sin \xi x \cos \zeta y \quad H_y = -i \frac{Dk\zeta}{(\omega/c)^2 - k^2} \cos \xi x \sin \zeta y$$

であり境界条件 $x = 0, a$ で $H_x = 0, y = 0, b$ で $H_y = 0$ なので

$$\sin(\xi a) = 0 \quad \text{より} \quad \xi = \frac{n\pi}{a}, \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

$$\sin(\zeta b) = 0 \quad \text{より} \quad \zeta = \frac{m\pi}{b}, \quad (m = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

この場合も、

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 = \left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2}\right)\pi^2 \quad \dots (4)$$

式 (3)、(4) をまとめて、 ω と k の関係は

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 = \left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2}\right)\pi^2 \quad \begin{cases} m, n = 1, 2, 3 \dots (\text{TM}) \\ m, n = 0, 1, 2 \dots (\text{TE}) \end{cases} \quad (m, n) = (0, 0) \text{ は除く。} \quad \dots (5)$$

この両辺を k で偏微分して

$$2 \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \omega}{\partial k} - 2k = 0 \quad \frac{\omega}{k} \frac{\partial \omega}{\partial k} = v_p \cdot v_g = c^2$$

4. 式 (5) より、

$$\omega_{mn} = c \sqrt{k^2 + \pi^2 \left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2} \right)}$$

$a > b$ より最小の ω は TM 波の場合、 $m = n = 1$ すなわち $\omega_{11} = c \sqrt{k^2 + \pi^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right)}$ であり、TE 波の場合、 $m = n = 0$ の時は $\eta^2 = 0$ となり、これは H_x, E_y, H_y, E_x の表式を見ると、分母が 0 となるので除く必要がある。よって $m = 0, n = 1$ すなわち $\omega_{10} = c \sqrt{k^2 + \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} \right)}$ である。

$\omega_{11} > \omega_{10}$ より最小の ω を与える電場、磁場は $\omega = \omega_{10}$ の TE 波である。この時、電場と磁場の値は $E_z = 0, H_z = D \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$ より

$$E_x = 0, \quad E_y = i \frac{1}{(\omega/c)^2 - k^2} \frac{\mu_0 \omega \pi}{a} D \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$H_x = -i \frac{1}{(\omega/c)^2 - k^2} \frac{k\pi}{a} D \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right), \quad H_y = 0$$

となる。

5. 電場、磁場とも実数だから、 $E(z) = \frac{1}{2} (E_z \exp\{i(kz - \omega t)\} + E_z^* \exp\{-i(kz - \omega t)\})$ と書ける。解は周期的になることが予想され、 $E(z)$ と $E(z + L)$ は位相因子を除いて一致する。

$$E(z + L) = \frac{1}{2} (E_z \exp\{i(kz - \omega t)\} \exp(ikL) + E_z^* \exp\{-i(kz - \omega t)\} \exp(-ikL))$$

この式より kL は 2π の整数倍になる必要があり、前問までは連続変数だった k が離散変数になることが求められる。つまり、 $k = k_l = \frac{2\pi l}{L}$ (l : 整数)
よって、分散関係も前問より

$$\omega_{mnl} = c \sqrt{k_l^2 + \pi^2 \left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2} \right)} = c\pi \sqrt{\frac{(2l)^2}{L^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2}}$$

と変更される。

専攻 問題 3 解答

1. \mathcal{H} から I_i を含む部分だけを抜きだすと、

$$\mathcal{H}_i = -zJM I_i + DI_i^2 \quad \dots (1)$$

よって $B_{\text{eff}} = zJM$ である。交換相互作用は本来電子間に働くクーロン力に由来するものだが、そのスピンの対する作用を磁場に換算した値が B_{eff} である。

2. I_i の取り得る値は $-1, 0, +1$ であり、それぞれの起こる確率は $\exp(-\beta\mathcal{H}_i)$ に比例するので、よって I_i の平均値は

$$\begin{aligned} \langle I_i \rangle &= \frac{\sum_{I_i} I_i e^{-\beta\mathcal{H}_i}}{\sum_{I_i} e^{-\beta\mathcal{H}_i}} = \frac{-e^{-\beta(+zJM+D)} + e^{-\beta(-zJM+D)}}{e^{-\beta(+zJM+D)} + e^0 + e^{-\beta(-zJM+D)}} \\ &= \frac{e^{-\beta D}(e^{+\beta zJM} - e^{-\beta zJM})}{1 + e^{-\beta D}(e^{+\beta zJM} + e^{-\beta zJM})} = \frac{2 \sinh(\beta zJM)}{e^{\beta D} + 2 \cosh(\beta zJM)} \quad \dots (2) \end{aligned}$$

3. (i) $D/(zJ) \rightarrow -\infty$ のとき、式 (1) よりスピンが大きい方が安定なので強磁性になる傾向が強いと考えられる。(2) 式は次式となる。

$$\langle I_i \rangle = \tanh(\beta zJM)$$

$\langle I_i \rangle$ は、 M について単調増大し、また十分大きい M に対しては $\langle I_i \rangle < M$ となるから、 $M = 0$ 以外で $\langle I_i \rangle = M$ となるような M が存在するのは、 $\langle I_i \rangle$ の原点での傾きが M の原点での傾きより大きいときである。よって、

$$\left. \frac{\partial}{\partial M} \tanh(\beta zJM) \right|_{M=0} > 1 \quad \therefore \beta zJ > 1 \quad \therefore T < \frac{zJ}{k} (= T_c)$$

- (ii) $D/(zJ) = 0$ のとき、式 (1) より、強磁性は起こり得るが、(i) の場合ほどではない。式 (2) は次式となる。

$$\langle I_i \rangle = \frac{2 \sinh(\beta zJM)}{1 + 2 \cosh(\beta zJM)}$$

この $\langle I_i \rangle$ も (i) のものと同様に振舞うから、

$$\left. \frac{\partial \langle I_i \rangle}{\partial M} \right|_{M=0} = \beta zJ \frac{2 \cosh(\beta zJM) + 4}{(1 + 2 \cosh(\beta zJM))^2} \Big|_{M=0} = \frac{2}{3} \beta zJ > 1 \quad \therefore T < \frac{2zJ}{3k} (= T_c)$$

- (iii) $D/(zJ) \rightarrow +\infty$ のとき、式 (1) より、スピンの大きさが 0 の方が安定なので強磁性は起こらない。実際、式 (2) は $\langle I_i \rangle = 0$ となり、これは $M = 0$ にしか解を持たない。

4. $x \equiv \beta zJM$ 、 $y \equiv \beta zJ \langle I_i \rangle$ として式 (2) を書き直すと

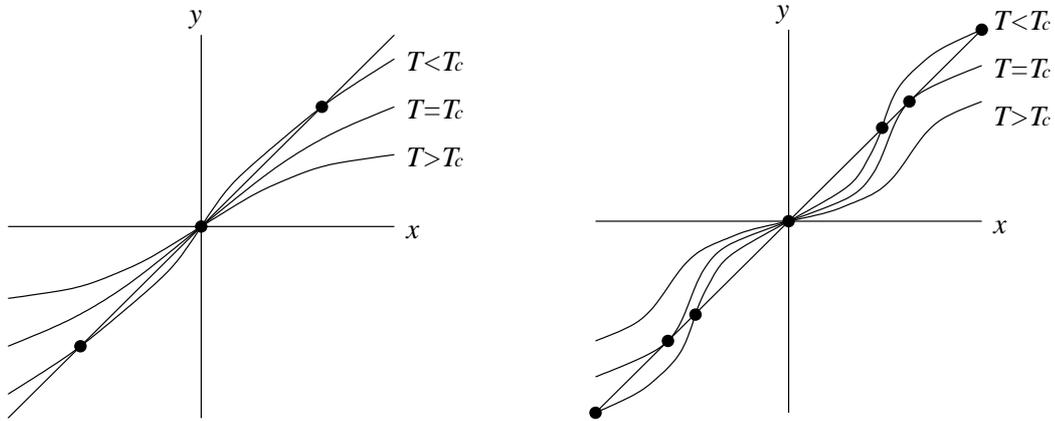
$$y = \beta zJ \frac{2 \sinh x}{e^{\beta D} + 2 \cosh x}$$

$x \ll 1$ の範囲でこの式の右辺を展開する。

$$\begin{aligned} y &\simeq 2\beta zJ \frac{x + x^3/6}{e^{\beta D} + 2 + x^2} = \frac{2\beta zJ}{e^{\beta D} + 2} \left(x + \frac{x^3}{6}\right) \left(1 + \frac{x^2}{e^{\beta D} + 2}\right)^{-1} \\ &\simeq \frac{2\beta zJ}{e^{\beta D} + 2} \left[x + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{e^{\beta D} + 2}\right)x^3\right] \quad \dots (3) \end{aligned}$$

この y が x に等しくなる x の解を求めるわけである。

式 (3) の x の 3 次の項の係数が負である場合の $T > T_c, T = T_c, T < T_c$ の 3 種類の温度での x, y のグラフを下の左図に示す。このように、この時の相転移点において解の x が連続である。よって 2 次相転移である。他方、式 (3) の x の 3 次の項の係数が正である場合の $T > T_c, T = T_c, T < T_c$ の 3 種類の温度での x, y のグラフを下の右図に示す。このように、この時の相転移点において解の x が不連続である。よって 1 次相転移である。



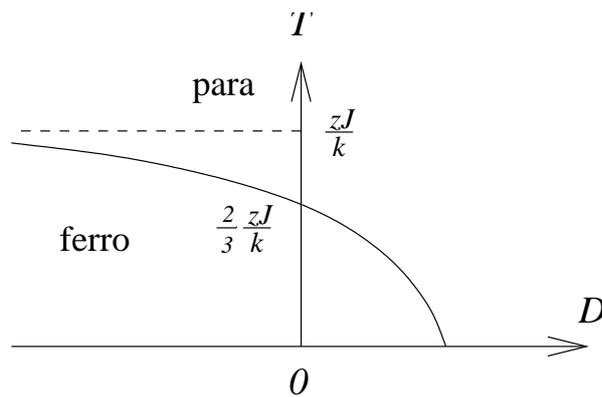
このように相転移の種類が変わる数居は式 (3) の x の 3 次の項の係数が 0 になる所であり、またこの場合には相転移が起こる温度は式 (3) の x の 1 次の項の係数が 1 になる所である。すなわち、

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{e^{\beta D} + 2} = 0 \qquad \frac{2\beta z J}{e^{\beta D} + 2} = 1$$

これらを満たす D, β が求める D_t, T_t である。

$$D_t = \frac{zJ}{3} \ln 4 \qquad T_t = \frac{zJ}{3k}$$

5. $D = 0, \pm\infty$ の場合については既に求めた。 $0 < D < \infty$ のどこかで、 $M = \langle I_i \rangle$ が原点以外に解を持たなくなるような D が存在するはずで、相図は下のようになると考えられる。(para : 常磁性、 ferro : 強磁性)



専攻 問題 4 解答

1. (i) 2つの核子系に対する完全な波動関数は $f(\vec{r}, \vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2)$ と書かれる。

\vec{r} : 2核子の相対座標

\vec{s}_1, \vec{s}_2 : 2核子の spin 空間座標

$\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$: 2核子の isospin 空間座標

ここでハミルトニアンにおける異なる種類の自由度間の相互作用が無視できると、

$$f = f_r(\vec{r}) f_\sigma f_\tau$$

と分解できる。

核子は fermion なので、波動関数は座標の交換について反対称でなければいけない。したがって、

• p-n 系 S_1 状態にあるものは $f_r(\vec{r})$ と f_σ が対称。従って isospin f_τ は反対称。

• p-p 系, n-n 系 isospin f_τ は対称。従って $f_r(\vec{r})f_\sigma$ は反対称。

となる。また、軌道角運動量 L の状態では空間部分は $f_r(-\vec{r}) = (-1)^L f_r(\vec{r})$ である。

以上のことを考えた結果、下表ようになる。

	d	p-p, n-n	
スピン	対称	対称	反対称
アイソスピン	反対称	対称	対称
空間部分 (L)	対称 (L 偶)	反対称 (L 奇)	対称 (L 偶)

よって、p-p, n-n, p-n 系で spin-parity は一緒ではありえない。従って、矛盾は起こらない。

(ii) • 磁気モーメントが $\mu_p + \mu_n \neq \mu_d$ となっていること。

軌道角運動量が 0 でない状態が混ざっているとすれば、その効果による磁気モーメントが生まれるから。

• 電気的四重極モーメントが 0 でないこと。

s 軌道は電気的四重極モーメントを持たないが、空間的にクローバー型をした d 軌道波動関数は四重極モーメントを持つから。

(iii) $\langle \vec{J} \cdot \vec{I} \rangle$ を F, J, I で表す。

$$\vec{F} = \vec{J} + \vec{I} \quad F^2 = J^2 + I^2 + 2\vec{J} \cdot \vec{I}$$

従って

$$\begin{aligned} \langle \vec{J} \cdot \vec{I} \rangle &= \langle F I J | \vec{J} \cdot \vec{I} | F I J \rangle = \langle F I J | \frac{1}{2} (F^2 - J^2 - I^2) | F I J \rangle \\ &= \frac{1}{2} [F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)] \end{aligned}$$

次に、重水素の分裂エネルギーを求める。(以下で陽子、重陽子の g 因子をそれぞれ g_p, g_d 、磁気能率を μ_p, μ_d と記す。)

前の式に電子のスピン $J = 1/2$ を代入すると、

$$\langle \vec{J} \cdot \vec{I} \rangle = \frac{1}{2} \left[F(F+1) - \frac{3}{4} - I(I+1) \right] = \frac{1}{2} \begin{cases} I & (F = I + 1/2) \\ -I - 1 & (F = I - 1/2) \end{cases}$$

となるので、超微細構造の分裂は、

$$\Delta E = \alpha g_I \cdot A \langle \vec{J} \cdot \vec{I} \rangle = \frac{\alpha g_I}{2} (2I + 1)$$

である。

次に、重水素の準位の分裂を求める。

まず、水素の場合、核のスピン $I = 1/2$ であるから、準位の分裂は、

$$\Delta E = \frac{\alpha g_p}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2} + 1\right) = \alpha g_p = 5.9 \times 10^{-6} \text{ eV}$$

である。次に重陽子は、スピン $I = 1$ である。また、原子核の磁気能率の大きさの定義が「磁気能率演算子 $\vec{\mu}_I = g_I \mu_N \vec{I}$ の z 成分の磁気量子数 $m_I = I$ の状態での期待値」であるので、陽子、重陽子それぞれの磁気能率は

$$\mu_p = g_p \mu_N \cdot I = g_p \mu_N \cdot \frac{1}{2} = 2.793 \mu_N$$

$$\mu_d = g_d \mu_N \cdot I = g_d \mu_N \cdot 1 = 0.857 \mu_N$$

となる。従って、重水素の準位の分裂は、

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{\alpha g_d}{2} \cdot (2 \cdot 1 + 1) = \alpha g_d \cdot \frac{3}{2} = (\alpha g_p) \cdot \frac{g_d}{g_p} \cdot \frac{3}{2} \\ &= (5.9 \times 10^{-6}) \times \frac{0.857}{2 \times 2.793} \times \frac{3}{2} \approx 1 \times 10^{-6} \text{ eV} \end{aligned}$$

2. (i) 図からわかること。

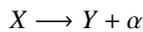
- γ 線は電荷をもたない。
- α 線と β 線は互いに反対の電荷をもつ
- α 線が $+2$ の電荷をもつことから、磁場は紙面の表から裏にむけてかかっている。
- α 線は単一のエネルギーをもつのにに対し、 β 線はさまざまなエネルギーをもつ。
- $|q| = mv/rB = p/rB$ なので、 α 線は運動量が大きく、 β 線は小さい。

ただし、 v は線源から出る時の速度、 p は運動量、 $|q|$ は電荷、 r は軌跡の曲率半径、 B は磁場をそれぞれ表している。

(ii) Q 値が核子の静止質量より十分小さいので、 γ 線以外には非相対論的近似をする。

α 崩壊

始状態の原子核を X 、終状態を Y とすると、崩壊の図式は以下ようになる。



各粒子の質量を $m_X, m_Y, m_\alpha, m_\gamma$ 、運動量を $\vec{p}_X, \vec{p}_Y, \vec{p}_\alpha, \vec{p}_\gamma$ と表すことにすれば、エネルギーと運動量の保存則より、

$$m_X = m_Y + m_\alpha + \frac{\vec{p}_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{\vec{p}_Y^2}{2m_Y} \quad \dots (1)$$

$$\vec{p}_X = \vec{p}_Y + \vec{p}_\alpha = 0 \quad \dots (2)$$

が得られる。

式 (2) から、 $\vec{p}_Y^2 = \vec{p}_\alpha^2$ が得られ、これと式 (1) より、 Q を計算すると、

$$Q = m_X - m_Y - m_\alpha = \frac{\vec{p}_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{\vec{p}_Y^2}{2m_Y} = \frac{\vec{p}_Y^2}{2m_Y} \left(1 + \frac{m_Y}{m_\alpha}\right)$$

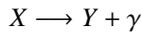
となる。これから求める反跳エネルギー $\vec{p}_Y^2/2m_Y$ を求めることができ、

$$\frac{\vec{p}_Y^2}{2m_Y} = \frac{Q}{1 + m_Y/m_\alpha} = \frac{5 \text{ MeV}}{1 + 196/4} = 0.1 \text{ MeV}$$

となる。

γ 崩壊

α 崩壊の場合と同様にして崩壊の図式は、



エネルギー-運動量保存則は、

$$m_X = m_Y + |\vec{p}_\gamma| + \frac{\vec{p}_\gamma^2}{2m_Y} \quad \dots (3)$$

$$\vec{p}_X = \vec{p}_\gamma + \vec{p}_Y = 0 \quad \dots (4)$$

である。式(3),(4)から、

$$Q = m_X - m_Y = |\vec{p}_\gamma| + \frac{\vec{p}_\gamma^2}{2m_Y} = |\vec{p}_\gamma| + \frac{\vec{p}_\gamma^2}{2m_Y}$$

となり、これを二次方程式の形に直して、

$$|\vec{p}_\gamma|^2 + 2m_Y|\vec{p}_\gamma| - 2m_YQ = 0 \quad \therefore |\vec{p}_\gamma| = -m_Y + \sqrt{m_Y^2 + 2m_YQ}$$

となる。ただし、第二項の符号が+になっているのは、 $|\vec{p}_\gamma| > 0$ による。 $m_Y \gg Q$ を用いてこれを計算すると、

$$|\vec{p}_\gamma| = -m_Y + m_Y \sqrt{1 + \frac{2Q}{m_Y}} \simeq -m_Y + m_Y \left(1 + \frac{Q}{m_Y}\right) = Q$$

となる。従って反跳エネルギーは、

$$\frac{\vec{p}_Y^2}{2m_Y} = \frac{Q^2}{2m_Y} = \frac{1}{2 \cdot 200 \cdot 940} \simeq 3 \text{ eV}$$

となる。

- (iii) β 崩壊は終核と e^- と $\bar{\nu}_e$ が出てくる三体崩壊であるから、エネルギー-運動量保存則からでは、電子の持つエネルギーや運動量の値は決まらないからである。

$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$ で生じた e^+ は、対消滅 ($e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$) で生じる γ 線を測定することで、 n はそれが核に捕獲されたとき生じる (n, γ) 反応の γ 線を測定することで検出される。後者の γ 線は前者よりもおくれで発生するので、両者を遅延同時計数法により測定する。

なお、この実験では、単一の $\bar{\nu}_e$ と p との反応ではなく、関係のない核子が多数存在するので、 e^+ と n を直接検出したところで、この反応を検証したことになることに注意。

専攻 問題 5 解答

1. 並進演算子 $T_{\vec{R}}$ を次のように定義する。

$$T_{\vec{R}}f(\vec{r}) = f(\vec{r} + \vec{R})$$

ハミルトニアン \mathcal{H} は周期的であるから

$$T_{\vec{R}}\mathcal{H}(\vec{r})\psi(\vec{r}) = \mathcal{H}(\vec{r} + \vec{R})\psi(\vec{r} + \vec{R}) = \mathcal{H}(\vec{r})\psi(\vec{r} + \vec{R}) = \mathcal{H}(\vec{r})T_{\vec{R}}\psi(\vec{r})$$

よって \mathcal{H} と $T_{\vec{R}}$ は交換可能。よって、 \mathcal{H} と $T_{\vec{R}}$ は同時対角化可能なので \mathcal{H} の固有波動関数 ψ について

$$T_{\vec{R}}\psi = C(\vec{R})\psi$$

となる固有値 $C(\vec{R})$ が存在する。(但し、 $T_{\vec{R}}\mathcal{H}(\hat{x})T_{\vec{R}}^\dagger = \mathcal{H}(\hat{x} + \vec{R})$ に注意。)

表面の影響を無視するため、ボルン・フォン・カルマンの周期的境界条件： (N_1, N_2, N_3) だけ並進して元に戻る、つまり、

$$\psi(\vec{x} + N_j\vec{a}_j) = C(\vec{a}_j)^{N_j}\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x}) \quad (j = 1, 2, 3)$$

とする。よって、

$$C(\vec{a}_j) = e^{i\frac{2\pi}{N_j}l_j} \quad (l_j = 0, 1, 2, \dots, N_j - 1)$$

$$\therefore \psi(\vec{x} + \vec{R}) = C(n_1\vec{a}_1)C(n_2\vec{a}_2)C(n_3\vec{a}_3)\psi(\vec{x}) = \exp\left(i\sum_j \frac{2\pi}{N_j}l_j n_j\right)\psi(\vec{x}) = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{R})\psi(\vec{x})$$

となる。ここで $\vec{k} = (\frac{2\pi}{N_1a}l_1, \frac{2\pi}{N_2a}l_2, \frac{2\pi}{N_3a}l_3)$ (結晶波数) であるが、逆格子ベクトル \vec{G} の整数倍の自由度をもつ。

$$\therefore e^{i(\vec{k} + n\vec{G}) \cdot \vec{R}} = e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} e^{in\vec{G} \cdot \vec{R}} = e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}$$

だからである。また、

$$\psi(\vec{x} + \vec{a}_j) = \left(1 + a_j \frac{d}{dx_j} + \frac{1}{2!} a_j^2 \frac{d^2}{dx_j^2} + \dots\right)\psi(\vec{x}) = e^{a_j \frac{d}{dx_j}} \psi(\vec{x}) = e^{i\vec{a}_j \cdot \vec{p}} \psi(\vec{x})$$

となり、 \vec{k} は波数ベクトルに他ならない。よって

$$T_{\vec{R}}\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} + \vec{R}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}\psi(\vec{r})$$

が示された。

2. (i) $R = ma(0 \leq m < N)$ だけ並進した場合を考える。

$$\begin{aligned} \Psi_A(x + ma) &= e^{ikma} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{ik(n-m)a} \phi_A(x - (n-m)a) = e^{ikma} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1-m}^{N-m} e^{ikna} \phi_A(x - na) \\ &= e^{ikma} \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{n=1}^{N-m} + \sum_{n=1-m}^0 \right) e^{ikna} \phi_A(x - na) \end{aligned}$$

周期的境界条件から、 $\phi(x + Na) = \phi(x)$ なので、

$$\begin{aligned} \Psi_A(x + ma) &= e^{ikma} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N-m} e^{ikna} \phi_A(x - na) + \sum_{n=1-m}^0 e^{ik(N+n)a} \phi_A(x - (N+n)a) \\ &= e^{ikma} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{ikna} \phi_A(x - na) = e^{ikma} \Psi_A(x) \end{aligned}$$

となり、ブロッホの定理が満たされていることが示された。

$\Psi_B(x)$ についても同様に示される。

(ii) 行列要素 H_{AA} は

$$H_{AA} = \int dx \Psi_A^*(x) \mathcal{H} \Psi_A(x)$$

であり、これに与えられた表式を代入して計算する。

その計算において、与えられた仮定より原子軌道の重なり積分は無視できる。すなわち

$$\int dx \phi_A^*(x-na) \frac{d^2}{dx^2} \phi_A(x-ma) = 0 \quad \text{for } n \neq m$$

またポテンシャルを介した相互作用は隣接 AB 原子間のみ働くので異なる A 原子の軌道同士には働かない。すなわち

$$\int dx \phi_A^*(x-na) U_A(x-la) \phi_A(x-ma) = 0 \quad \text{for } n \neq m$$

$$\int dx \phi_A^*(x-na) U_B(x-la-b) \phi_A(x-ma) = 0 \quad \text{for } \forall n, m$$

以上を踏まえると H_{AA} は

$$\begin{aligned} H_{AA} &= \frac{1}{N} \sum_n \int dx \phi_A^*(x-na) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U_A(x-na) \right] \phi_A(x-na) \\ &= \int dx \phi_A^*(x) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U_A(x) \right] \phi_A(x) \end{aligned}$$

この表式は $\phi_A(x)$ が局在化した場合の固有エネルギー E_A に他ならない。 H_{BB} についてもまったく同様である、

$$H_{AA} = E_A \quad H_{BB} = E_B$$

次に H_{AB} は、これもまた原子軌道の重なり積分は無視できるので

$$\int dx \phi_A^*(x-na) \frac{d^2}{dx^2} \phi_B(x-ma-b) = 0 \quad \text{for } \forall n, m$$

ポテンシャルの相互作用は隣接する AB 原子間の軌道では

$$\int dx \phi_A^*(x-na) \{ U_A(x-na) + U_B(x-na-b) \} \phi_B(x-na-b) dx = 2\gamma$$

隣接する BA 原子間の軌道では

$$\int dx \phi_A^*(x-na) \{ U_A(x-na) + U_B(x-na+a-b) \} \phi_B(x-na+a-b) = 2\gamma'$$

となる。以上を踏まえると H_{AB} は

$$\begin{aligned} H_{AB} &= \frac{1}{N} \sum_n \int dx e^{-ikan} \phi_A^*(x-na) \left[U_A(x-na) + U_B(x-na-b) \right] e^{+ikan} \phi_B(x-na-b) \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_n \int dx e^{-ikan} \phi_A^*(x-na) \left[U_A(x-na) + U_B(x-na+a-b) \right] e^{+ika(n-1)} \phi_B(x-na+a-b) \\ &= \frac{1}{N} \sum_n (2\gamma + 2\gamma' e^{-ika}) \\ &= 2\gamma + 2\gamma' e^{-ika} \end{aligned}$$

と求まる。最後に H_{BA} は

$$H_{BA} = H_{AB}^* = 2\gamma + 2\gamma' e^{+ika}$$

である。

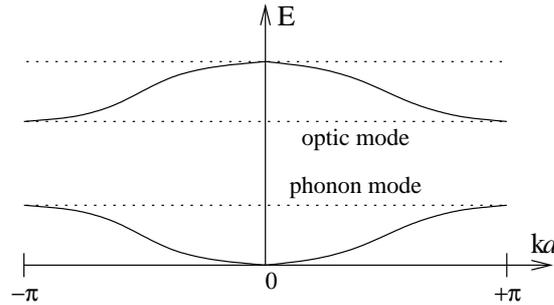
(iii) ハミルトニアン の 行列表現は

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} E_A & 2\gamma + 2\gamma' e^{-ika} \\ 2\gamma + 2\gamma' e^{ika} & E_B \end{pmatrix}$$

である。この固有値 E^\pm を求めよ。

$$E^\pm = \frac{1}{2} \left(E_A + E_B \pm \sqrt{(E_A - E_B)^2 + 16(\gamma^2 + 2\gamma\gamma' \cos ka + \gamma'^2)} \right)$$

と求まる。この 2 種の固有エネルギーの k 依存性は下図の通りである。



(iv) バンドギャップは光学モードと音響モードとの間のエネルギー差の最小値である。

$$E_{\text{bandgap}} = \min(E^+ - E^-) = \sqrt{(E_A - E_B)^2 + 16(\gamma - \gamma')^2}$$

バンドの幅は光学モードと音響モードと共に同じで

$$E_{\text{bandwidth}} = \sqrt{(E_A - E_B)^2 + 16(\gamma + \gamma')^2} - \sqrt{(E_A - E_B)^2 + 16(\gamma - \gamma')^2}$$

(v) 第 1 Brillouin zone には $2N$ の状態がある。A, B 原子が 1 つずつ電子をもっていると $2N$ の電子があるから第 1 Brillouin zone の音響モードがうめつくされる。

専攻 問題 6 解答

- 半透鏡に必要な自由度は首振り調整と仰角である。右の図の dial 1 は首振り調整用ダイヤル、dial 2 は仰角調整用ダイヤルである。
- 強め合う干渉が起きる時、D における光の強度はほぼレーザーの出力に等しい。したがって、出力電圧は

$$\begin{aligned} & \text{(D に単位時間当たり届く光子の数)} \times \text{(電子の電荷)} \times \text{(抵抗)} \\ &= \frac{1 \text{ mW}}{hc/\lambda} \times e \times 50 \Omega = 2.5 \times 10^{-2} \text{ V} \quad (\equiv V_{\text{max}}) \end{aligned}$$

また、P の位置を ΔL だけ変化させた時の出力電圧は、適当な位相因子を除いて、

$$V_{\text{max}} \cos^2 \left(\frac{2\pi\Delta L}{\lambda} \right) = \frac{1}{2} V_{\text{max}} \left\{ 1 + \cos \left(\frac{4\pi\Delta L}{\lambda} \right) \right\}$$

と書ける。すると、出力電圧の変化が最大になるのは

$$\frac{d}{d(\Delta L)} \frac{1}{2} V_{\text{max}} \left\{ 1 + \cos \left(\frac{4\pi\Delta L}{\lambda} \right) \right\} = \frac{2\pi}{\lambda} V_{\text{max}} \sin \left(\frac{4\pi\Delta L}{\lambda} \right) = 0 \quad \frac{\Delta L}{\lambda} = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

の時である。この時の出力電圧の変化率は、明らかに $V_{\text{max}} \times 2\pi/\lambda$ である。

このまわりで、P が 1 nm だけずれると、出力電圧は

$$V_{\text{max}} \times \frac{2\pi}{\lambda} \times 1 \text{ nm} = 2.5 \times 10^{-4} \text{ V}$$

だけ変化する。

- S と P の距離を $x(t)$ とする (t は時刻)。今、装置の大きさが充分小さく、P の速度も小さい。時刻 t に S を出た光が P で反射し再び S に時刻 t' に戻ったとすると、

$$t' \simeq t + \frac{2x(t)}{c} \quad dt' = dt + \frac{2\dot{x}(t)}{c} dt$$

したがって、レーザーの角周波数を ω_0 とすると、P で反射した光の角周波数は

$$\omega = \frac{1}{1 + 2\dot{x}/c} \omega_0 \simeq \left(1 - \frac{2\dot{x}}{c} \right) \omega_0$$

となる。よって D における干渉信号は、

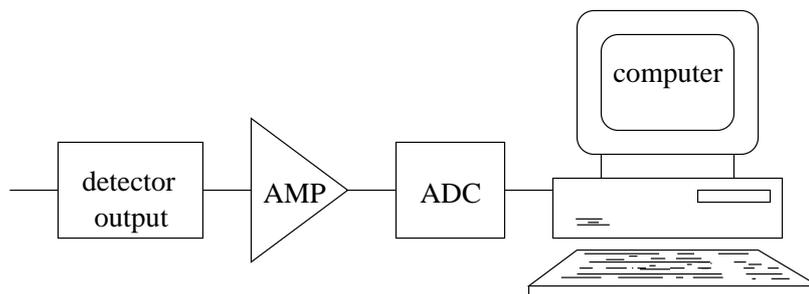
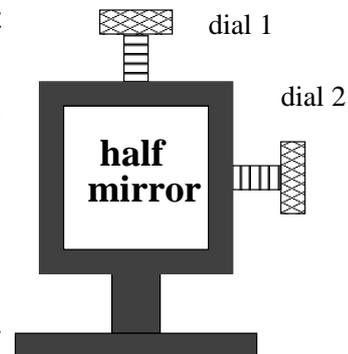
$$\cos \omega t + \cos \omega_0 t = 2 \cos \left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t \right) \simeq 2 \cos \left(\frac{\dot{x}}{c} \omega_0 t \right) \cos \omega_0 t$$

より、 $\cos \left(\frac{\dot{x}}{c} \omega_0 t \right)$ のように変化する。

可視光領域であるから測定できるのは $\cos \omega_0 t$ の振幅の 2 乗である。 $\dot{x} = 10 \text{ cm/s}$ の時のその値は、

$$2 \times \frac{\dot{x}}{c} \times \frac{c}{\lambda} = 3 \times 10^5 \text{ Hz}$$

で振動する。これを記録するには次ページの図のような装置を組めばよい。



ただしアンブは $10^3 \sim 10^6$ Hz 程度の周波数に応答できるものを使う。

4. マイケルソン-モーレーの実験では D に生ずる干渉縞を観測する。まず、 $SP=SQ=l$ とし、SP を地球の公転方向に向ける。ここで、いわゆる「エーテルの風」があるとすると、SP 往復に要する時間は公転速度を v として、

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} \simeq \frac{l}{c} \left(1 + \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{l}{c} \left(1 - \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$$

SQ 往復に要する時間は

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} \simeq \frac{2l}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

したがって、 $t_1 - t_2 = lv^2/c^3$ となる。

次に、装置を 90° 回転して同じことを行なうと、明らかに $t_1 - t_2 = -lv^2/c^3$ となる。したがって、D で観測される干渉縞は $2c(t_1 - t_2) = 2lv^2/c^2$ だけずれるはずである。このずれを波長に直すと、

$$\frac{2lv^2/c^2}{\lambda} = \frac{2 \times 11 \text{ m}}{0.63 \mu\text{m}} \left(\frac{3.0 \times 10^4 \text{ m/s}}{3.0 \times 10^8 \text{ m/s}} \right)^2 \sim 0.3$$

となる。「エーテルの風」がない場合、つまり光速度が光源の速度に依らない場合はこのずれは観測されない。これが、マイケルソン-モーレーの実験の原理である。

実験の精度は SP、SQ の距離が本当に一定に保たれているかに大きく依っている。したがって、温度変化や装置の振動による器具のゆがみに影響を受ける。また、光線にはある程度広がりがあるので、干渉縞の位置にも誤差が含まれる。

専攻 問題 7 解答

1. (i) Na^+ と Cl^- とは内でも外でも互いに同じ濃度なので、 K^+ のみを電位の原因として計算する。

Nernst の式より、活動電位 V は、

$$V = \frac{RT}{zF} \ln \frac{C_o}{C_i} \quad \dots (1)$$

と表記できる

つまり、

$$V = \frac{RT}{zF \log_{10} e} \log_{10} \frac{C_o}{C_i} \quad \dots (2)$$

いま、 $\log_{10} \frac{C_o}{C_i} = \log_{10} \frac{1}{20} \sim -1.3$ 、また、 $z = 1$ なので、 $V \sim -80$ [mV] である。

- (ii) ナトリウムイオンに対して細胞膜の透過性が増し、細胞内にナトリウムイオンが流入することによって細胞内電位が正になる。
- (iii) $\text{Na}^+ - \text{K}^+$ ポンプ ($\text{Na}^+ - \text{K}^+$ ATPase) によって、ATP 消費を伴ってナトリウムイオンが細胞外へ、カリウムイオンが細胞内へ能動輸送される。
- (iv) この二価イオンは Ca^{2+} である。カルシウムイオンは通常は細胞内濃度が細胞外濃度に対して著しく低い。しかし、刺激によってチャンネルが開くことによって細胞内でカルシウムイオンが高濃度になる。骨格筋においては、カルシウムイオンが制御に重要である。骨格筋細胞は刺激伝達物質をうけると、それによってカルシウムイオンの細胞内濃度を高くして、カルシウムイオンを制御タンパクに到達させ、筋収縮を起こさせる、という構造になっている。

2. (i) ●暗号表を見ると、おなじアミノ酸がいくつかの塩基配列に対応している。たとえば、Pro は CCU, CCC, CCA, CCG, と 3 番目の塩基については何でもよいことになっている。そのため、おなじアミノ酸配列に対していくつかの塩基配列が対応し得、全体としての塩基の割合にも自由度がある。
- 生物がその機能を発揮する際に直接関わるのはタンパク質の機能である。タンパク質の機能はその構造により、その構造は、一次構造、すなわち配列によって決定されるといわれている。生物にとって重要なタンパク質は種をこえておおむね保存されているので、アミノ酸配列も種を越えて似ていなくてはならない。ところで、これを逆にとると、塩基配列がどうであっても、その結果としてのアミノ酸配列があっていれば構わない、ということがいえる。自然界では塩基配列による突然変異がつねに起こっている。それによってもしアミノ酸配列に重大な変更が起こった場合、多くは致死にいたってその塩基配列を子孫に残すことはできない。しかし、塩基配列が変わったからといって必ずしもアミノ酸が変異となるわけではなく、結果としてその塩基配列を子孫に残す。
- このようなことが進化の過程で多く繰り返されることによって、同じタンパクでも塩基配列には種によってばらつくことがおこることになる。また、もしある種に対して、生存に関して有利な塩基の割合が存在するのなら、その種の塩基の割合はそれに従うことが塩基配列の自由度によって可能になる。(例に出ているのは、高温では水素結合数が多くて結合がつよい GC 対を好み、低温では逆に水素結合数の少ない AT 対を好むためである。)
- (ii) ●Phe-Leu, Ile-Met: どちらも疎水性が強い。
Asp-Glu: COO^- をもつ。
Ser-Arg: どちらも親水性。
- 突然変異がおきても、タンパク質の性質があまり変化しなくなるようになるので、突然変異に対する耐性が強くなる。

専攻 問題 8 解答

1. 並進対称性 2 回回転対称性
2. 生体内において、アミノ酸はL型、D型のうちL型のみ存在する。また、蛋白質の二次構造である α -ヘリックスは生体内では右巻きのものしか存在しない。これらの蛋白質構成要素である分子に鏡映や反転対称性がないことは、これらの対称性を持つ分子が、生体内に存在しないことを示している。
よって、タンパク質分子やその結晶には鏡映・反転対称性はない。(α-ヘリックスが右巻きしか存在しないのは、アミノ酸がL型しかないことによる。)

3. (i) X線回折で観測結果として得られるのは、 $|F|^2, |F_H|^2, f_H$ の3つである。 f_H は、差パターン関数の原理により、 $|F|^2, |F_H|^2$ の2つから得られるのだが、この問題は、すでに $f(x_1, x_2, x_3)$ として与えられていて、それをういて良いと思われる。
さて、 F, F_H, f_H は、

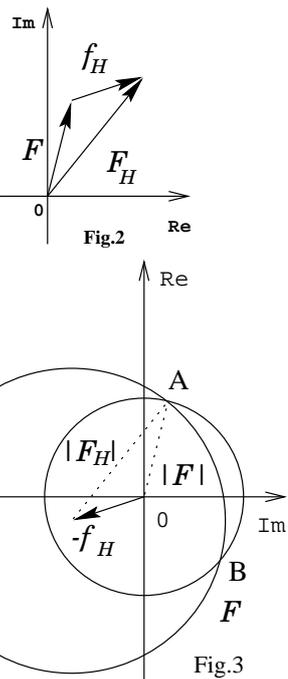
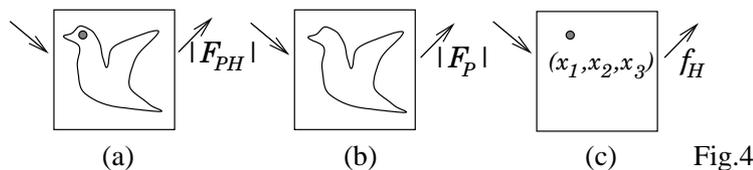
$$F_H = F + f_H \quad \dots (1)$$

の関係にあるが、これを複素平面で図示すると Fig.3 の様になっている。(1) より $F = F_H - f_H$ であるから、 F の位相は分からないが、 $-f_H$ の終点 (矢印の先端という意味) から、半径 $|F_H|$ のところのどこかにあることが分かる。また、当然、 F は複素平面原点から半径 $|F|$ の円周上にある。ゆえ、この2円周の2交点 A, B のどちらか1ヶ所が F の値であることが分かる。

[注] Fig.4 (はソーキング (付着) した重原子) の (a)(b) を比較して、(c) を理解するという方法を、解析的に取り扱う。X線回折で得られるのは、問題にもある $F(x, y, z)$ だけである。いま、パターン座標空間 (u, v, w) を考える。(これは単位格子と同じ座標にとる。)

$$P(u, v, w) = \frac{1}{V} \sum_{X, Y, Z \in \text{UnitCell}} |F(X, Y, Z)|^2 e^{-2\pi i(Xu + Yv + Zw)}$$

が各 (u, v, w) 点について計算され、3次元のパターン関数が得られる。単位胞中の原子 i, j の原子番号を f_i, f_j とすると、パターン図上で i, j の原子間に相当する位置に $f_i \times f_j$ の高さのピークが現れる。よって、 f_i, f_j とともに大きい数であれば、積であるため圧倒的ピーク高となる。そのピークの (u, v, w) を読めれば (x_1, x_2, x_3) も求まる。いま、重原子同形置換法では、 $|F|, |F_H|$ はわかる。そこで、 $(|F_H|^2 - |F|^2) = (\Delta F)^2$ を係数としてパターン関数を計算すれば、 $(\Delta F)^2$ には重原子の位置に関する情報が含まれているので、重原子の位置が分かるのである。これを差パターン関数の原理と呼ぶ。



- (ii) 前問より交点は二つ存在することがわかる。よって $|F|^2$ と $|F_H|^2$ の情報からは位相角を一つの値に限定することはできない。別の場所に重原子を付加した結晶パターンから、また Argand 作図を行ない、 $F = F'_H - f'_H$ となる点を求めると、また二つの交点が出るが、このうち一つは、前問の A または B のどちらかと交わる。その点が求める位相角である。