1994年度　入学試験 一般教育科目

■ 教育 英語

1. 以下の文章は科学論文の著者として守るべきことを述べたものである。各項目を和訳せよ。

(i) An author's central obligation is to present a concise, accurate account of the research performed as well as an objective discussion of its significance.

(ii) A paper should contain sufficient detail and reference to public sources of information to permit the author's peers to repeat the work.

(iii) An author should cite those publications that have been influential in determining the nature of the reported work and that will guide the reader quickly to the earlier work that is essential for understanding the present investigation.

(iv) Fragmentation of research papers should be avoided. A scientist who has done extensive work on a system should organize publication so that each paper gives a complete account of a particular aspect of the general study.

(v) It is inappropriate for an author to submit manuscripts describing essentially the same research to more than one journal of primary publication.

(vi) A criticism of a published paper may sometimes be justified; however, in no case is personal criticism considered to be appropriate.

(vii) Only persons who have significantly contributed to the research and paper preparation should be listed as authors. The author who submits a manuscript for publication attests to the fact that any others named as authors have seen the final version of the paper and have agreed to its submission for publication.

2. 以下の文章は、ある国際会議におけるポスターセッションでの会話である。日本語部分を英語に変えよ。

A: Hello. Is this poster yours?
B: Yes.
A: Would you mind if I ask you some questions?
B: (1) ええ、どうぞ。
A: We tried this.......
B: (2) あなたの話していることが、わかりません。
(3) すみませんが、もう一度いっていただけませんか。
A: We tried this before — but....
B: (4) まだよくわかりません。
(5) すみませんが、もっとゆっくり話していただけませんか。
(6) えーと、本を読むみたいに。
A: All right. People — in my group...
B: (7) はい、わかります。
(8) それで、ご質問は何ですか？
A: I'd like to know — how.....
B: (9)A 社の反応キット (reaction kit) を私達の研究室で改良した方法で使いました。
(10) 方法については、3 枚目の図を御覧下さい。
(11) 精度、感度、再現性ともに優れたこの方法の詳細は、文献 4 にあります。
(12) 測定は B 社の装置で通常の方法で行ないました。
(13) 反応時間は 30 分です。

(14) 図 7 のグラフは、私達の結果をプロットしたものです。
(15) 二種類の細胞には反応性に大きな違いがあります。

A: My question is .....

B: (16) 良くわかりません。

A: (In a lower voice) Maybe it’s all my fault.—- I am not clear enough.

B: (17) え、なんですって。
(18) まだ何か質問があるのですか。
(19) どうぞ遠慮なくお尋ね下さい。

A: (20) この仕事は論文になっていますか。

B: (21) 投稿したところです。
(22) 受理されたら、お送りしましょうか。

A: (23) はい、是非お願いします。
(24) これが私のアドレスです。
Thank you very much for your helpful discussion.

B: (25) いえどうも。

3. 以下の文章を読み文中に述べられている内容に沿い設問に日本語で答えよ。

Hydrogen was prepared many years before it was recognized as a distinct substance by Cavendish in 1766. It was named by Lavoisier. Hydrogen is the most abundant of all elements in the universe, and it is thought that the heavier elements were, and still are, being built from hydrogen and helium. It has been estimated that hydrogen makes up more than 90% of all the atoms or three quarters of the mass of the universe. It is found in the sun and most stars, and plays an important part in the proton-proton reaction and carbon-nitrogen-oxygen cycle, which accounts for the energy of the sun and stars. It is thought that hydrogen is a major component of the planet Jupiter and that at some depth in the planet’s interior the pressure is so great that solid molecular hydrogen is converted into solid metallic hydrogen. On earth, hydrogen occurs chiefly in combination with oxygen in water, but it is also present in organic matter such as living plants, petroleum, coal, etc. It is present as the free element in the atmosphere, but only to the extent of less than 1 ppm, by volume. It is the lightest of all gases, and combines with other elements, sometimes explosively, to form compounds. Great quantities of hydrogen are required commercially for the fixation of nitrogen from the air in the Haber ammonia process and for the hydrogenation of fats and oils. It is also used as a rocket fuel, for welding, for production of hydrochloric acid, for the reduction of metallic ores, and for filling ballons. It is prepared by the action of steam on heated carbon, by decomposition of certain hydrocarbons with heat, by the electrolysis of water, or by displacement from acids by certain metals. Liquid hydrogen is important in cryogenics and in the study of superconductivity as its melting point is only about ten degrees above absolute zero. In 1932, Urey announced the preparation of a table isotope, deuterium with an atomic weight of 2. Two years later an unstable isotope, tritium, with an atomic weight of 3 was discovered. Tritium has a half-life of about 12.5 years. The atom of deuterium is found mixed in with about 6000 ordinary hydrogen atoms. Tritium atoms are also present but in much smaller proportion. Tritium is readily produced in nuclear reactors and is used in the production of the hydrogen bomb.

– quoted, with modiffications, from CRC Handbook of Chemistry and Physics,1984.

(i) 水素の地球上での最も主要な存在形態はなにか。

(ii) 水素分子は地球大気上中にどの程度あるか。

(iii) 水素の製造法を二つあげよ。

(iv) 水素は実用上何の役に立っているか。二つあげよ。

(v) 宇宙において水素は、質量比にしてどれだけ存在するか。

(vi) 水素の同位体にはどのようなものがあり、それらの存在比はどのようになっているか。

(vii) 水素の融点はどの程度か。

■ 教育 数学

1. 漸化式

$$x_{n+3} - 4x_{n+2} + x_{n+1} + 6x_n = 0 \qquad \cdots (1)$$

を満たす実数列 x_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ について、以下の設問に答えよ。

(i) 漸化式 (1) を満たす数列は、最初の 3 項 x_0, x_1, x_2 を指定すれば一意的に定まる。式 (1) を変形して、

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

を満たす行列 T を求めよ。

(ii) 設問 (i) で求めた行列 T の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (ただし、$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする) を求めよ。

(iii) 設問 (ii) で求めた固有値に対応する、規格化された右固有ベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ を求めよ。ただし、右固有ベクトルとは、$T\vec{u}_i = \lambda_i \vec{u}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を満たすベクトルである。

(iv) x_n $(n \geq 3)$ を x_0, x_1, x_2 によって表せ。

2. 微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(s)}{\mathrm{d}s^2} = -K(s)y(s) \qquad \cdots (2)$$

について、以下の設問に答えよ。ただし、以下で、$'$ は s に関する微分を表すものとする。

(i) $K(s) = K_0$ (正の定数) のとき、初期条件 $y(0) = a, y'(0) = b$ に対する式 (2) の解を求めよ。

(ii) 式 (2) は、$y_1(s) = w(s)\exp[i\psi(s)]$ および $y_2(s) = w(s)\exp[-i\psi(s)]$ の 2 つの独立解をもつ。ただし $i = \sqrt{-1}$ である。このとき、次の関係式が成り立つことを示せ。

$$w'' + Kw - \psi'^2 w = 0 \qquad \cdots (3)$$

$$\psi' = \frac{c}{w^2} \quad (c \text{ は定数}) \qquad \cdots (4)$$

(iii) 式 (2) の一般解は、2 つの独立解の線形結合で表される。任意の一般解に対して、$s = s_0$ から $s = s$ までの変化を、変換行列により、

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

と表現したとき、A, B を $w, w', \psi, w_0, w'_0, \psi_0$ で表せ。ただし、添字のない関数は $s = s$ での値、添字 0 のついた関数は $s = s_0$ での値を表すものとする。また、ここでは式 (4) の c は 1 とする。

3. 非負の実数に対して定義された関数 u を関数 w へ、以下のように変換する演算子 $\mathcal{A}$ を考える:

$$w = \mathcal{A}u$$
$$w(\xi) = \pi^{-1/2}\int_0^{\xi}\mathrm{d}\zeta\ (\xi-\zeta)^{-1/2}u(\zeta) \qquad (\xi \geq 0) \qquad \cdots (5)$$

関数 w が既知のとき、関数 u を求めたい。以下の設問に答えよ。

(i) $\sin^2 t = (\zeta-\eta)/(\xi-\eta)$ と変数変換することにより、次の定積分

$$I \equiv \int_\eta^{\xi}\mathrm{d}\zeta\ (\xi-\zeta)^{-1/2}(\zeta-\eta)^{-1/2}$$

を求めよ。ただし、$\eta < \xi$ とする。

(ii) 式 (5) にさらに $\mathcal{A}$ を作用させた

$$\mathcal{A}w = \mathcal{A}^2u = \pi^{-1/2}\int_0^{\xi}\mathrm{d}\zeta\ (\xi-\zeta)^{-1/2}w(\zeta) \qquad \cdots (6)$$

を、u の一重積分で表せ。

(iii) 設問 (ii) の結果を考慮すると、$\mathcal{A}u = w$ から関数 u を求めるための $\mathcal{A}$ の逆演算子 $\mathcal{A}^{-1}$ は、具体的にどう表現されるか。

(iv) $w(\xi) = \xi^2$ の場合について、$u = \mathcal{A}^{-1}w$ を求めよ。

■ 教育 物理

1. 地球からロケットを発射する。ただしロケットは発射時のごく短い時間だけ噴射するものとし、飛行中のロケットの質量 m は地球の質量 M より十分に小さく、かつ一定であるとする。またロケットは質点とみなし、かつ球対称な重力場の中を運動するものとして、空気の抵抗は無視する。地球の中心からロケットまでの距離を r として、以下の問いに答えよ。ただし、数値は有効数字 2 けたまで計算するものとし、以下の数値を用いてよい。

   重力定数 $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$
   地球の質量 $M = 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
   地球の半径 $R = 6.38 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$

   (i) 2 次元の極座標 (r, θ) においてロケットに働く力の成分を (F_r, F_θ) とすると、ロケットの運動方程式は、

   $$F_r = m\left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] \qquad F_\theta = \frac{m}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)$$

   のように書ける。いまの設問の場合、角運動量 L が保存することを示し、ロケットの r に関する運動方程式を、L を用いて書き表せ。

   (ii) 地球からロケットを真上に発射する時、ロケットの力学的エネルギー E の式を書け。またロケットの地球からの離脱速度を数値的に求めよ。

   (iii) ロケットを離脱速度で真上に打ち上げた時、地上から高さ $3R$ になるまでに要する時間を数値的に求めよ。

   (iv) ロケットを距離 r の円軌道にのせたところ、地球を回る周期が T であったという。r と T の間に成り立つ関係式 (ケプラーの第 3 法則) を、(i) の運動方程式から導け。さらに円軌道の地上からの高度が $3R$ の時に T の値を求め、静止衛星の軌道（静止軌道）が $3R$ より高いか低いかを答えよ。

2. z 軸上を強さ I の定常電流が、 $z = \infty$ から座標原点まで流れている。以下のそれぞれの場合に、任意の点 P における磁場ベクトル $\vec{H}$ を求めよ (3 つの成分、または大きさと方向を、位置の関数として示せ)。ただし点 P の位置座標としては、円柱座標では (ρ, ϕ, z)、球座標では (r, θ, ϕ) を用いよ。

   (i) 原点に至った電流 I が、そのまま z 軸上を $z = -\infty$ へ流れ去るとき。

   (ii) 原点に至った電流 I が、原点から放射状にすべての方向に一様に広がっていくとき。磁場ベクトル $\vec{H}$ だけでなく、原点から広がっていく電流密度ベクトル $\vec{i}$ も位置の関数として求めよ。

   (iii) 原点に至った電流 I が、原点に点電荷 Q として溜っていくとき。この時は電場の変化に伴い、変位電流 (電束電流) が生じることに注意せよ。

3. 図 1 のように、滑らかなシリンダーが多孔質の物質でできた壁でしきられ、壁の両側にはピストン 1,2 がはまっている。壁の左右には圧力差をつけることができるが、小孔を通して気体のやりとりが生じる。ピストン、シリンダーおよび多孔質の壁は断熱材でできているとして、以下の問に答えよ。

(i) 最初は図 1 のように、ピストン 2 は壁まで押し込まれており、壁の左側に体積 V_o で温度 T_o の気体が入っていた。そこでピストン 1 にかける圧力をゆっくりと下げて、気体が体積 $8V_o$ になるまで準静的に膨張させた (図 2)。この状態での気体の温度を T_o で表せ。ただし気体は単原子分子からなる理想気体 (定積モル比熱 $\frac{3}{2}R$
R は気体定数) として計算せよ。

(ii) つぎに、ピストン 1 にかける圧力はそのままで、ピストン 2 にかける圧力をピストン 1 の圧力の 1/10 まで下げて一定に保ったところ、気体は多孔質の壁を通して右に移動し、ピストン 1、2 はゆっくりと動いて、気体はすべて壁の右側に移った。(図 3)。この過程で、気体全体のエンタルピー $H \equiv U + pV$ (U は内部エネルギー、p は圧力、V は体積) が保存されることを示せ。

(iii) 気体が理想気体だと、(ii) の過程でその温度 T はどうなるか。ただし

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V$$

を公式として用いて良い。

(iv) 気体が理想気体ではなく、状態方程式

$$pV = nRT + Bp \qquad n \text{ は気体のモル数、} B \text{ は定数}$$

に従う場合に、(ii) の過程での気体の温度変化を B, V_o, T_o および定圧熱容量 $C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$ を使って表せ。ただし、始状態の温度や圧力は、設問 (i) で理想気体について得られた結果を使うこと。

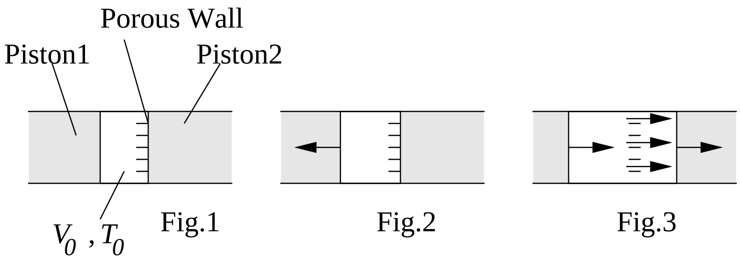


Fig.1　Fig.2　Fig.3

■ 教育 英語 解答

1. **(i)** 著者の主要な責務は、研究の意義についての客観的な議論に加え、行った研究についての簡潔で正確な記述を行なうことにある。

 (ii) 論文には、著者の同業者がその研究を再現することができるように、十分な詳細と公の情報源への照会が収められているべきである。

 (iii) 著者は、公表した研究の本質を決定づけるうえで影響力のあった出版物や、その研究を理解する上で不可欠な以前の研究を読者がすみやかに見つけるための手助けとなる出版物について言及すべきである。

 (iv) 断片的な論文の寄せ集め、という状態は避けられるべきである。ひとつのことがらについて広範囲にわたる研究を行った科学者は、ひとつひとつの論文が、研究全体のうちのある一つの面を完全に記述するように、出版を系統立てて行うべきである。

 (v) 著者が、本質的には同じ研究を述べた原稿を、最初に公表を行った雑誌以外に投稿するのは、不適切である。

 (vi) 公表された論文に対する批判は、ときには正当化されるだろう。しかし、どんなことがあっても個人向けの批判が妥当だとみなされることはない。

 (vii) 研究や論文の準備に重要な貢献をした人物のみが、著者として名前を掲載されるべきである。出版用の原稿を投稿する著者は、他の著者として名前をあげられているすべての人が論文の最終版を確認したことと、それを出版用に投稿することに同意済みであることの証人なのである。

2. (1) Sure, go ahead please. / Of course, please go ahead. というのは典型的な間違いで、 I **don't** mind. を示すために Of course not. などと言わねばならない。

 (2) I don't understand what you meanare talking about.

 (3) Sorry, but could you repeat it? / Excuse me, but could you explain it again?

 (4) I still cannot understand you. / Still it's not clear for me.

 (5) Excuse me, but would you please speak slower? / ...., but please speak more slowly.

 (6) Uh, as if you are reading me a book. / Uh, like reading a book.

 (7) Yes, I understand.

 (8) So, what is your answer?

 (9) We used the reaction kit of "A" corporation in a method we improved in our group. / We used the "A" corporation reaction kit and we used it with an improved method which we developed in our group.

 (10) The method is shown in the figure on 3rd page. / You can see the method .....

 (11) For further details of this highly accurate, sensitive, and reproducible method you should refer to literature 4.

 (12) We measured them in a usual method with the device of "B" corporation. / The measurements were taken in a usual way......

 (13) The reaction time was 30 minutes.

 (14) Figure 7 is our plotted results.

 (15) There is a large difference in the reactivity between these two kinds of cell.

 (16) I don't know well. / I'm not sure.

 (17) What?

 (18) Do you have any other answer?

 (19) Please tell me without reserve.

 (20) Is this work published in a paper? / Have you written this work down in any paper?

 (21) I've just submitted it.

 (22) Shall I send it to you when it is accepted?

 (23) Yes, please.

 (24) This is my address.

(25) You are welcome.

3. **全訳**

1776 年、Cavendish によって１つの元素であると認識されるずっと前から、水素は製造されていた。Lavoisier によって、水素と名付けられた。水素は宇宙においてすべての元素の中でもっとも豊富に存在しており、重元素は、水素やヘリウムから、作られ、現在でも作られていると考えられている。水素は全原子の存在比で 99 %、宇宙の全質量の４分の３を占めていると予想されている。水素は太陽やほとんどの星で見つかり、太陽や星々で発生するエネルギー源となる p-p 反応や CNO サイクルに重要な役割を果たしている。水素は木星の主成分であり、木星の内部では、高圧のため、水素が分子性固体から金属性固体へと変化している深さがあると、考えられている。地球上では主に水中で酸素と結合した形で存在するが、植物・石油・石炭等の有機物中にも存在している。水素は、大気中に分子としても存在しているが、1ppm にも満たない。水素は、全気体の中で最も軽い気体で、爆発しながら結合し化合物を作ることがある。水素は工業的にハーバーアンモニア法による空気中の窒素の固定や、油脂や石油の水素添加に大量に使用される。また、ロケット燃料や溶接、塩酸の製造、鉱石の還元、風船への充填にも使用されている。また、製造法としては、加熱炭素表面での水蒸気の反応・炭化水素の熱分解・水の電気分解・金属と酸の置換反応がある。液体水素は、低温学、また、超伝導の研究において重要である。というのも、水素の融点は約 10K しかないためである。1932 年、Urey は原子量２の重水素という放射性元素の存在を発見した。２年後、原子量３のトリチュウムが発見された。トリチュウムの半減期は約 12.5 年である。重水素は約 6000 個の通常の水素に１個含まれている。トリチュウムも存在しているが、その確率は遥かに小さい。トリチュウムは原子核反応により作成され、水爆の製造に使用されている。

– CRC 物理化学ハンドブック (1984) から修正を施して引用

(i) 酸素と化合して水として存在している。

(ii) 容積にして 1ppm 未満である。

(iii) 問題文中には 4 通りの製法がかかれている。

- 加熱された黒鉛 (炭素) と水蒸気との反応
- ある種の炭化水素の分解
- 水の電気分解
- 酸から金属と置換。(要するに酸に金属を溶かして発生させる)

(iv) これに対する答えも問題文中にはたくさんある。

ハーバーアンモニア法による窒素固定、油脂の水素添加
ロケット燃料、溶接、塩酸の原料、金属鉱石の還元
風船に入れる目的
低温物理、超伝導の研究用

(v) 4 分の 3

(vi) 質量数 2 の重水素が約 6000 分の 1。質量数 3 の三重水素がさらに微量ある。

(vii) 約絶対 10 度

■ 教育 数学 解答

1. **(i)** 行列 T により

$$T\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+3} \\ x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n \\ x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

よって

$$T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) 固有値 λ_i は、

$$\lambda_i^3 - 4\lambda_i^2 + \lambda_i + 6 = (\lambda_i + 1)(\lambda_i - 2)(\lambda_i - 3) = 0 \qquad \therefore\ \ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$$

(iii) 各固有値 λ_i に対応する規格化された固有ベクトルは次の通りに求まる。

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{91}}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iv) 前問で得られた固有ベクトルを大きさを適当に調整して並べた行列

$$P \equiv \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ -4 & 8 & 12 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

を用いて行列 T を対角化する。すなわち、

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x'_{n+2} \\ x'_{n+1} \\ x'_n \end{pmatrix}$$

と数列を変換すれば、漸化式は

$$\begin{pmatrix} x'_{n+3} \\ x'_{n+2} \\ x'_{n+1} \end{pmatrix} = P^{-1}TP\begin{pmatrix} x'_{n+2} \\ x'_{n+1} \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_{n+2} \\ x'_{n+1} \\ x'_n \end{pmatrix}$$

と簡単になる。この漸化式を解いて

$$\begin{pmatrix} x'_{n+2} \\ x'_{n+1} \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_2 \\ x'_1 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$

逆変換してもとの数列にもどす。

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ -4 & 8 & 12 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

簡単な代数計算の後に

$$x_n = \left(\frac{1}{2}x_0 - \frac{5}{12}x_1 + \frac{1}{12}x_2\right)(-1)^n + \left(x_0 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2\right)2^n + \left(-\frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2\right)3^n$$

を得る。

2. **(i)** 微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(s)}{\mathrm{d}s^2} = -K_0 y(s)$$

は調和振動子方程式の形なので、その一般解は

$$y(s) = C_1 \cos(\sqrt{K_0}s) + C_2 \sin(\sqrt{K_0}s)$$

で与えられる。初期条件 $y(0) = a, y'(0) = b$ より、次の解を得る。

$$y(s) = a\cos(\sqrt{K_0}s) + \frac{b}{\sqrt{K_0}} \sin(\sqrt{K_0}s)$$

(ii) 与えられた y_1, y_2 の微分を求めておく。

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[w\exp(+i\psi)] = w'\exp(+i\psi) + i\psi' w\exp(i\psi)$$
$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[w\exp(-i\psi)] = w'\exp(-i\psi) - i\psi' w\exp(-i\psi)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}s^2} = w''\exp(+i\psi) + 2i\psi' w'\exp(+i\psi) + i\psi'' w\exp(+i\psi) - \psi'^2 w\exp(i\psi)$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 y_2}{\mathrm{d}s^2} = w''\exp(-i\psi) - 2i\psi' w'\exp(-i\psi) - i\psi'' w\exp(-i\psi) - \psi'^2 w\exp(-i\psi)$$

これらを式 (2) に代入して

$$w'' + 2i\psi' w' + i\psi'' w - \psi'^2 w + Kw = 0$$
$$w'' - 2i\psi' w' - i\psi'' w - \psi'^2 w + Kw = 0$$

を得る。両辺足すと

$$w'' + Kw - \psi'^2 w = 0$$

となり式 (3) が示された。また両辺引くことにより

$$2\psi' w' + \psi'' w = 0$$

となり w をかけて変形して

$$2\psi' w' w + \psi'' w^2 = (\psi' w^2)' = 0 \qquad \therefore \quad \psi' = \frac{c}{w^2}$$

となり式 (4) が示された。

(iii) 解は 2 つの基底関数の線形結合なので、変換

$$y = Ay_0 + By_0' \qquad \cdots (1)$$

は $y = y_1(s)$ だけを用いて検証すればよい。代入して計算していく。

$$w\exp(i\psi) = Aw_0\exp(i\psi_0) + B[w_0'\exp(i\psi_0) + i\psi_0' w_0\exp(i\psi_0)]$$

$$Aw_0\exp i(\psi_0 - \psi) + B[w_0'\exp i(\psi_0 - \psi) + i\psi_0' w_0\exp i(\psi_0 - \psi)] - w = 0$$

上の式が恒等的に成り立つためには実部と虚部がゼロでなくてはならない。すなわち、

$$Aw_0\cos(\psi_0 - \psi) + B[w_0'\cos(\psi_0 - \psi) - \psi_0' w_0\sin(\psi_0 - \psi)] - w = 0$$
$$Aw_0\sin(\psi_0 - \psi) + B[w_0'\sin(\psi_0 - \psi) + \psi_0' w_0\cos(\psi_0 - \psi)] = 0$$

あとはこの連立方程式を解けばよい。簡単な計算の後に次のような答を得る。

$$A = +w_0' w\sin(\psi_0 - \psi) + \frac{w}{w_0}\cos(\psi_0 - \psi)$$
$$B = -w_0 w\sin(\psi_0 - \psi)$$

3.　＊ギリシャ文字がややこしいので注意。

(i) 与えられた変数変換により

$$\zeta - \eta = (\xi - \eta)\sin^2 t$$
$$\xi - \zeta = (\xi - \eta)\cos^2 t$$
$$\mathrm{d}\zeta = (\xi - \eta) 2 \sin t \cos t \mathrm{d}t$$

であり定積分 I は

$$I = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\ (\xi-\eta)^{-1/2}(\cos t)^{-1} \cdot (\xi-\eta)^{-1/2}(\sin t)^{-1} \cdot (\xi-\eta) 2\sin t\cos t = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}t\ 2 = \pi$$

(ii) 式 (6) の $w(\zeta)$ を式 (5) の積分変数を η とした式で表す。

$$\mathcal{A}w = \pi^{-1/2}\int_0^{\xi}\mathrm{d}\zeta\ (\xi-\zeta)^{-1/2}\pi^{-1/2}\int_0^{\zeta}\mathrm{d}\eta\ (\zeta-\eta)^{-1/2}u(\eta)$$

ζ と η の積分順序を交換して

$$\mathcal{A}w = \pi^{-1}\int_0^{\xi}\mathrm{d}\eta\ u(\eta)\int_{\eta}^{\xi}\mathrm{d}\zeta\ (\xi-\zeta)^{-1/2}(\zeta-\eta)^{-1/2}$$

この 2 項目の積分は前問で得られているので結局

$$\mathcal{A}w = \int_0^{\xi}\mathrm{d}\eta\ u(\eta) \qquad \cdots (2)$$

となる。

(iii) 前問の結果の式 (2) の両辺を ξ で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathcal{A}w = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\int_0^{\xi}\mathrm{d}\eta\ u(\eta) = u(\eta)$$

すなわち、この左辺は w の逆写像 $\mathcal{A}^{-1}w$ に他ならない。よって、

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathcal{A}$$

と表すことができる。

(iv) 式 (6) に $w(\xi) = \xi^2$ を代入して計算していく

$$\begin{aligned}\mathcal{A}w &= \pi^{-1/2}\int_0^{\xi}\mathrm{d}\zeta\ (\xi-\zeta)^{-1/2}\zeta^2 = 4\pi^{-1/2}\int_0^{\xi}\mathrm{d}\zeta\ (\xi-\zeta)^{1/2}\zeta \\ &= \frac{8}{3}\pi^{-1/2}\int_0^{\xi}\mathrm{d}\zeta\ (\xi-\zeta)^{3/2} = \frac{16}{15}\pi^{-1/2}\xi^{5/2}\end{aligned}$$

前問の結果より

$$u(\xi) = \mathcal{A}^{-1}w = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathcal{A}w = \frac{8}{3}\pi^{-1/2}\xi^{3/2}$$

となる。

■ 教育 物理 解答

1. **(i)** 地球の重力場から受ける力を代入するとロケットの運動方程式は次のようになる。

$$m\left[\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right]=F_r=-\frac{GMm}{r^2} \quad \cdots (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[mr^2\dot{\theta}\right]=rF_\theta=0 \quad \cdots (2)$$

角運動量の z 成分は $L_z=mr^2\dot{\theta}$ で表されるので、式 (2) から直ちに

$$mr^2\dot{\theta}=\mathrm{const}=L$$

とわかる。$\dot{\theta}=L/mr^2$ を式 (1) に代入して、r 方向の運動方程式は

$$m\left(\ddot{r}-\frac{L^2}{m^2r^3}\right)=-\frac{GMm}{r^2} \quad \cdots (3)$$

と書き直される。

(ii) 今、角運動量はゼロなので、式 (3) で $L=0$ とおいた式に両辺 $\dot{r}$ をかけて積分すると、E を積分定数として

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2-\frac{GMm}{r}=E \quad \cdots (4)$$

となる。E がロケットの力学的エネルギーである。離脱速度 v_1 は上の式で $E=0, r=R$ とおいたときの $\dot{r}$ である。

$$v_1=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{\frac{2\cdot 6.67\times10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}}\cdot 5.97\times10^{24}\,\mathrm{kg}}{6.38\times10^6\,\mathrm{m}}}\simeq 1.12\times10^4\,\mathrm{m/s}$$

(iii) 離脱速度で発射するので式 (4) で $E=0$ であり、前問の v_1 を用いると

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=v_1\sqrt{\frac{R}{r}} \qquad \therefore\quad \mathrm{d}t=\frac{1}{v_1}\sqrt{\frac{r}{R}}\mathrm{d}r$$

r が R から $4R$ になるのにかかる時間 t は、

$$t=\int\mathrm{d}t=\int_R^{4R}\mathrm{d}r\,\frac{1}{v_1}\sqrt{\frac{r}{R}}=\frac{14}{3}\frac{R}{v_1}$$
$$=\frac{14}{3}\times\frac{6.38\times10^6\,\mathrm{m}}{1.12\times10^4\,\mathrm{m/s}}\simeq 2700\,\mathrm{sec}$$

(iv) 円軌道なので

$$\dot{r}=\ddot{r}=0 \quad r=\mathrm{const} \quad \dot{\theta}=\mathrm{const}=\omega=2\pi/T$$

である。これらを式 (1) に代入して

$$T^2=\frac{r^3(2\pi)^2}{GM}$$

を得る。
特に、$r=4R$ のとき、

$$T=2\pi\sqrt{\frac{(4R)^3}{GM}}=16\sqrt{2}\pi R\sqrt{\frac{R}{2GM}}=16\sqrt{2}\pi\frac{R}{v_1}\simeq 40000\,\mathrm{sec}\simeq 11\,\mathrm{hour}$$

であるから、静止衛星の軌道は $4R$ 以上である。

2. 磁場に関するアンペールの定理より

$$\oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_S \vec{i}\cdot \vec{n}\mathrm{d}S \qquad \cdots (5)$$

であることを用いて各問を解く

(i) 磁場の成分は明らかに ϕ 成分 (直線電流を回る方向) H_ϕ のみである。図 1 の平面で式 (5) を考えると、

$$2\pi\rho H_\phi = -I \qquad \therefore \quad H_\phi = -\frac{I}{2\pi\rho}$$

と求まる。

(ii) これも磁場の成分は H_ϕ のみである。図 2 の 2 つの曲面でそれぞれ式 (5) を考える。角度 θ の立体角が $(1-\cos\theta)/2$ であることを考慮すると、上の曲面では直線電流が下へ流れ、放射電流が上へ流れるので

$$2\pi\rho H_\phi = -I + I\frac{1-\cos\theta}{2} \qquad \therefore \quad H_\phi = -\frac{I}{2\pi\rho}\frac{1+\cos\theta}{2}$$

となり、下の曲面では放射電流が下へ流れるので

$$2\pi\rho H_\phi = -I\frac{1-\cos(\pi-\theta)}{2} \qquad \therefore \quad H_\phi = -\frac{I}{2\pi\rho}\frac{1+\cos\theta}{2}$$

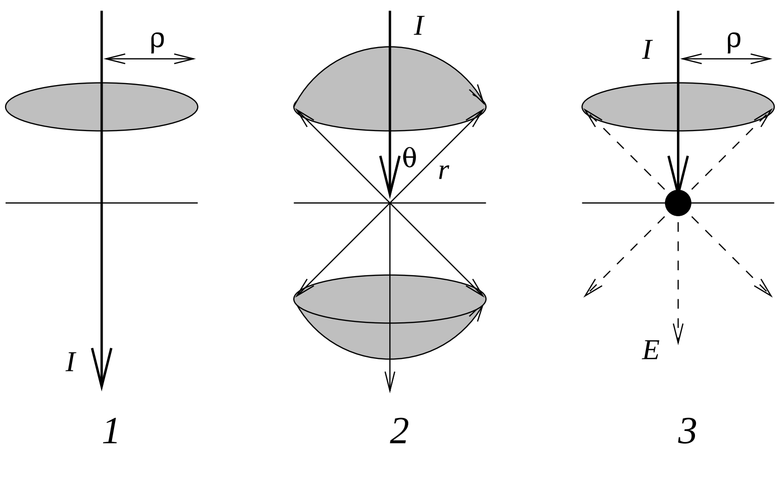
となり、結局どちらでも同じである。
電流密度は デルタ関数とヘビサイド関数 $\theta(z)$ を用いて

$$\vec{i} = -I\delta(x)\delta(y)\theta(z)\vec{e}_z + \frac{I}{4\pi r^2}\vec{e}_r$$

と表される。

(iii) $r=\infty$ に極板を想定すれば、$z=0$ の点電荷とコンデンサをなす。アンペールの定理はコンデンサ間の電場の変化を変位電流としてとらえることにより、普通にその間を電流が流れているとして扱うことができる。よってこの問題は設問 (ii) と全く同じ状況となる。

$$H_\phi = -\frac{I}{2\pi\rho}\frac{1+\cos\theta}{2}$$



3. **(i)** 理想気体の断熱過程では、次の Poisson 関係が成り立つ

$$TV^{\gamma-1} = \mathrm{Const} \qquad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$$

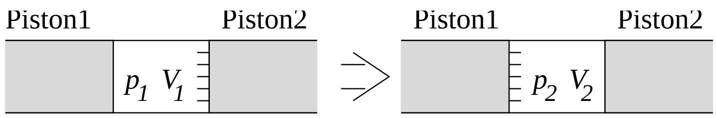
ここで、定積モル比熱 $C_v = \frac{3}{2}R$、定圧モル比熱 $C_p = \frac{5}{2}R$ を用いた。上の関係式より、求める温度を T_1 とすると

$$T_o V_o^{\frac{2}{3}} = T_1 (8V_o)^{\frac{2}{3}} \qquad T_1 = \frac{T_o}{4}$$

(ii) 下図のような膨張過程の際、気体は壁の左の領域から押し出されるときにピストンより p_1V_1 の仕事をされ、壁の右の領域に入る時には p_2V_2 の仕事をピストン 2 にしている。その時気体の内部エネルギーの変化を考えると、

$$U_2 - U_1 = p_1V_1 - p_2V_2 \qquad \therefore \quad H_1 = U_1 + p_1V_1 = U_2 + p_2V_2 = H_2$$

よってエンタルピーは保存する。



(iii) (ii) の過程は、始めと終りでエンタルピーが保存しているから、その温度変化は

$$T_2 - T_1 = \int_{p_1}^{p_2} \mathrm{d}p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$$

で与えられる。この被積分関数は、Maxwell の関係式などより

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = -\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p^{-1} = \frac{1}{C_p}$$

すなわち、

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{1}{C_p}\left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V\right] \qquad \cdots (6)$$

で与えられる。今、気体を理想気体とすると、$pV = nRT$ より

$$T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V = \frac{nRT}{p} - V = 0$$

よって、設問 (ii) の過程で温度変化はなく、説問 (i) で求めた温度 $T_o/4$ がこの過程を通じての気体の温度となる。

(iv) 設問 (iii) で求めた式 (6) に、気体の状態方程式

$$pV = nRT + Bp$$

を代入すると

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = -\frac{B}{C_p} \qquad \therefore \quad T = -\frac{B}{C_p}p + A \qquad A = \mathrm{const}$$

を得る。設問 (i) の結果より

$$\frac{T_o}{4} = -\frac{B}{C_p}p_1 + A \qquad p_1 = \frac{1}{32}p_o$$

であったので、設問 (ii) の過程の終状態における温度は、

$$T = -\frac{B}{C_p}\frac{p_1}{10} + A = \frac{9}{320}\frac{B}{C_p}p_o + \frac{T_o}{4}$$

となる。

B の正負によって、$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$ の正負が決まり、よって、設問 (i) の前後での温度の増減が定まる。