1994年度　入学試験 一般教育科目（英語なし）

■ 教育 数学

1. 漸化式

$$x_{n+3} - 4x_{n+2} + x_{n+1} + 6x_n = 0 \qquad \cdots (1)$$

を満たす実数列 x_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ について、以下の設問に答えよ。

(i) 漸化式 (1) を満たす数列は、最初の 3 項 x_0, x_1, x_2 を指定すれば一意的に定まる。式 (1) を変形して、

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

を満たす行列 T を求めよ。

(ii) 設問 (i) で求めた行列 T の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (ただし、$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする) を求めよ。

(iii) 設問 (ii) で求めた固有値に対応する、規格化された右固有ベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ を求めよ。ただし、右固有ベクトルとは、$T\vec{u}_i = \lambda_i \vec{u}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を満たすベクトルである。

(iv) x_n $(n \geq 3)$ を x_0, x_1, x_2 によって表せ。

2. 微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(s)}{\mathrm{d}s^2} = -K(s)y(s) \qquad \cdots (2)$$

について、以下の設問に答えよ。ただし、以下で、$'$ は s に関する微分を表すものとする。

(i) $K(s) = K_0$ (正の定数) のとき、初期条件 $y(0) = a, y'(0) = b$ に対する式 (2) の解を求めよ。

(ii) 式 (2) は、$y_1(s) = w(s)\exp[i\psi(s)]$ および $y_2(s) = w(s)\exp[-i\psi(s)]$ の 2 つの独立解をもつ。ただし $i = \sqrt{-1}$ である。このとき、次の関係式が成り立つことを示せ。

$$w'' + Kw - \psi'^2 w = 0 \qquad \cdots (3)$$

$$\psi' = \frac{c}{w^2} \quad (c \text{ は定数}) \qquad \cdots (4)$$

(iii) 式 (2) の一般解は、2 つの独立解の線形結合で表される。任意の一般解に対して、$s = s_0$ から $s = s$ までの変化を、変換行列により、

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

と表現したとき、A, B を $w, w', \psi, w_0, w'_0, \psi_0$ で表せ。ただし、添字のない関数は $s = s$ での値、添字 0 のついた関数は $s = s_0$ での値を表すものとする。また、ここでは式 (4) の c は 1 とする。

3.　非負の実数に対して定義された関数 u を関数 w へ、以下のように変換する演算子 $\mathcal{A}$ を考える:

$$w = \mathcal{A}u$$
$$w(\xi) = \pi^{-1/2} \int_0^{\xi} \mathrm{d}\zeta \ (\xi - \zeta)^{-1/2} u(\zeta) \qquad (\xi \geq 0) \qquad \cdots (5)$$

関数 w が既知のとき、関数 u を求めたい。以下の設問に答えよ。

(i) $\sin^2 t = (\zeta - \eta)/(\xi - \eta)$ と変数変換することにより、次の定積分

$$I \equiv \int_{\eta}^{\xi} \mathrm{d}\zeta \ (\xi - \zeta)^{-1/2} (\zeta - \eta)^{-1/2}$$

を求めよ。ただし、$\eta < \xi$ とする。

(ii) 式 (5) にさらに $\mathcal{A}$ を作用させた

$$\mathcal{A}w = \mathcal{A}^2 u = \pi^{-1/2} \int_0^{\xi} \mathrm{d}\zeta \ (\xi - \zeta)^{-1/2} w(\zeta) \qquad \cdots (6)$$

を、u の一重積分で表せ。

(iii) 設問 (ii) の結果を考慮すると、$\mathcal{A}u = w$ から関数 u を求めるための $\mathcal{A}$ の逆演算子 $\mathcal{A}^{-1}$ は、具体的にどう表現されるか。

(iv) $w(\xi) = \xi^2$ の場合について、$u = \mathcal{A}^{-1} w$ を求めよ。

■ 教育 物理

1. 地球からロケットを発射する。ただしロケットは発射時のごく短い時間だけ噴射するものとし、飛行中のロケットの質量 m は地球の質量 M より十分に小さく、かつ一定であるとする。またロケットは質点とみなし、かつ球対称な重力場の中を運動するものとして、空気の抵抗は無視する。地球の中心からロケットまでの距離を r として、以下の問いに答えよ。ただし、数値は有効数字 2 けたまで計算するものとし、以下の数値を用いてよい。

   重力定数 $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$
   地球の質量 $M = 5.97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$
   地球の半径 $R = 6.38 \times 10^{6}\ \mathrm{m}$

   (i) 2 次元の極座標 (r, θ) においてロケットに働く力の成分を (F_r, F_θ) とすると、ロケットの運動方程式は、

   $$F_r = m\left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] \qquad F_\theta = \frac{m}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)$$

   のように書ける。いまの設問の場合、角運動量 L が保存することを示し、ロケットの r に関する運動方程式を、L を用いて書き表せ。

   (ii) 地球からロケットを真上に発射する時、ロケットの力学的エネルギー E の式を書け。またロケットの地球からの離脱速度を数値的に求めよ。

   (iii) ロケットを離脱速度で真上に打ち上げた時、地上から高さ $3R$ になるまでに要する時間を数値的に求めよ。

   (iv) ロケットを距離 r の円軌道にのせたところ、地球を回る周期が T であったという。r と T の間に成り立つ関係式 (ケプラーの第 3 法則) を、(i) の運動方程式から導け。さらに円軌道の地上からの高度が $3R$ の時に T の値を求め、静止衛星の軌道（静止軌道）が $3R$ より高いか低いかを答えよ。

2. z 軸上を強さ I の定常電流が、 $z = \infty$ から座標原点まで流れている。以下のそれぞれの場合に、任意の点 P における磁場ベクトル $\vec{H}$ を求めよ (3 つの成分、または大きさと方向を、位置の関数として示せ)。ただし点 P の位置座標としては、円柱座標では (ρ, ϕ, z)、球座標では (r, θ, ϕ) を用いよ。

   (i) 原点に至った電流 I が、そのまま z 軸上を $z = -\infty$ へ流れ去るとき。

   (ii) 原点に至った電流 I が、原点から放射状にすべての方向に一様に広がっていくとき。磁場ベクトル $\vec{H}$ だけでなく、原点から広がっていく電流密度ベクトル $\vec{i}$ も位置の関数として求めよ。

   (iii) 原点に至った電流 I が、原点に点電荷 Q として溜っていくとき。この時は電場の変化に伴い、変位電流 (電束電流) が生じることに注意せよ。

3. 図 1 のように、滑らかなシリンダーが多孔質の物質でできた壁でしきられ、壁の両側にはピストン 1,2 がはまっている。壁の左右には圧力差をつけることができるが、小孔を通して気体のやりとりが生じる。ピストン、シリンダーおよび多孔質の壁は断熱材でできているとして、以下の問に答えよ。

(i) 最初は図 1 のように、ピストン 2 は壁まで押し込まれており、壁の左側に体積 V_o で温度 T_o の気体が入っていた。そこでピストン 1 にかける圧力をゆっくりと下げて、気体が体積 $8V_o$ になるまで準静的に膨張させた (図 2)。この状態での気体の温度を T_o で表せ。ただし気体は単原子分子からなる理想気体 (定積モル比熱 $\frac{3}{2}R$
R は気体定数) として計算せよ。

(ii) つぎに、ピストン 1 にかける圧力はそのままで、ピストン 2 にかける圧力をピストン 1 の圧力の 1/10 まで下げて一定に保ったところ、気体は多孔質の壁を通して右に移動し、ピストン 1、2 はゆっくりと動いて、気体はすべて壁の右側に移った。(図 3)。この過程で、気体全体のエンタルピー $H \equiv U + pV$ (U は内部エネルギー、p は圧力、V は体積) が保存されることを示せ。

(iii) 気体が理想気体だと、(ii) の過程でその温度 T はどうなるか。ただし

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V$$

を公式として用いて良い。

(iv) 気体が理想気体ではなく、状態方程式

$$pV = nRT + Bp \qquad n \text{ は気体のモル数、} B \text{ は定数}$$

に従う場合に、(ii) の過程での気体の温度変化を B, V_o, T_o および定圧熱容量 $C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$ を使って表せ。ただし、始状態の温度や圧力は、設問 (i) で理想気体について得られた結果を使うこと。

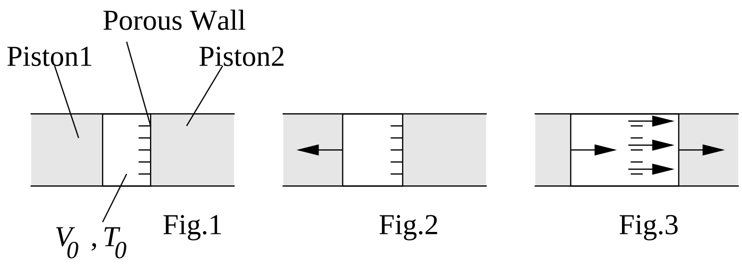


Fig.1　Fig.2　Fig.3

■ 教育 数学 解答

1. **(i)** 行列 T により

$$T\begin{pmatrix}x_{n+2}\\x_{n+1}\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{n+3}\\x_{n+2}\\x_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x_{n+2}-x_{n+1}-6x_n\\x_{n+2}\\x_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1&-6\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{n+2}\\x_{n+1}\\x_n\end{pmatrix}$$

よって

$$T=\begin{pmatrix}4&-1&-6\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

(ii) 固有値 λ_i は、

$$\lambda_i^3-4\lambda_i^2+\lambda_i+6=(\lambda_i+1)(\lambda_i-2)(\lambda_i-3)=0 \qquad \therefore\quad \lambda_1=-1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3$$

(iii) 各固有値 λ_i に対応する規格化された固有ベクトルは次の通りに求まる。

$$\vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\qquad \vec{u}_2=\frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\qquad \vec{u}_3=\frac{1}{\sqrt{91}}\begin{pmatrix}9\\3\\1\end{pmatrix}$$

(iv) 前問で得られた固有ベクトルを大きさを適当に調整して並べた行列

$$P\equiv\begin{pmatrix}1&4&9\\-1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad P^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}1&-5&6\\-4&8&12\\3&-3&-6\end{pmatrix}$$

を用いて行列 T を対角化する。すなわち、

$$\begin{pmatrix}x_{n+2}\\x_{n+1}\\x_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'_{n+2}\\x'_{n+1}\\x'_n\end{pmatrix}$$

と数列を変換すれば、漸化式は

$$\begin{pmatrix}x'_{n+3}\\x'_{n+2}\\x'_{n+1}\end{pmatrix}=P^{-1}TP\begin{pmatrix}x'_{n+2}\\x'_{n+1}\\x'_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_{n+2}\\x'_{n+1}\\x'_n\end{pmatrix}$$

と簡単になる。この漸化式を解いて

$$\begin{pmatrix}x'_{n+2}\\x'_{n+1}\\x'_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_2\\x'_1\\x'_0\end{pmatrix}$$

逆変換してもとの数列にもどす。

$$\begin{pmatrix}x_{n+2}\\x_{n+1}\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&9\\-1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}\frac{1}{12}\begin{pmatrix}1&-5&6\\-4&8&12\\3&-3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\x_1\\x_0\end{pmatrix}$$

簡単な代数計算の後に

$$x_n=\left(\frac{1}{2}x_0-\frac{5}{12}x_1+\frac{1}{12}x_2\right)(-1)^n+\left(x_0+\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2\right)2^n+\left(-\frac{1}{2}x_0-\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{4}x_2\right)3^n$$

を得る。

2. **(i)** 微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(s)}{\mathrm{d}s^2} = -K_0 y(s)$$

は調和振動子方程式の形なので、その一般解は

$$y(s) = C_1 \cos(\sqrt{K_0}s) + C_2 \sin(\sqrt{K_0}s)$$

で与えられる。初期条件 $y(0) = a, y'(0) = b$ より、次の解を得る。

$$y(s) = a\cos(\sqrt{K_0}s) + \frac{b}{\sqrt{K_0}}\sin(\sqrt{K_0}s)$$

(ii) 与えられた y_1, y_2 の微分を求めておく。

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[w\exp(+i\psi)] = w'\exp(+i\psi) + i\psi' w\exp(i\psi)$$
$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[w\exp(-i\psi)] = w'\exp(-i\psi) - i\psi' w\exp(-i\psi)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}s^2} = w''\exp(+i\psi) + 2i\psi' w'\exp(+i\psi) + i\psi'' w\exp(+i\psi) - \psi'^2 w\exp(i\psi)$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 y_2}{\mathrm{d}s^2} = w''\exp(-i\psi) - 2i\psi' w'\exp(-i\psi) - i\psi'' w\exp(-i\psi) - \psi'^2 w\exp(-i\psi)$$

これらを式 (2) に代入して

$$w'' + 2i\psi' w' + i\psi'' w - \psi'^2 w + Kw = 0$$
$$w'' - 2i\psi' w' - i\psi'' w - \psi'^2 w + Kw = 0$$

を得る。両辺足すと

$$w'' + Kw - \psi'^2 w = 0$$

となり式 (3) が示された。また両辺引くことにより

$$2\psi' w' + \psi'' w = 0$$

となり w をかけて変形して

$$2\psi' w' w + \psi'' w^2 = (\psi' w^2)' = 0 \qquad \therefore \quad \psi' = \frac{c}{w^2}$$

となり式 (4) が示された。

(iii) 解は 2 つの基底関数の線形結合なので、変換

$$y = Ay_0 + By_0' \qquad \cdots (1)$$

は $y = y_1(s)$ だけを用いて検証すればよい。代入して計算していく。

$$w\exp(i\psi) = Aw_0\exp(i\psi_0) + B[w_0'\exp(i\psi_0) + i\psi_0' w_0\exp(i\psi_0)]$$

$$Aw_0\exp i(\psi_0 - \psi) + B[w_0'\exp i(\psi_0 - \psi) + i\psi_0' w_0\exp i(\psi_0 - \psi)] - w = 0$$

上の式が恒等的に成り立つためには実部と虚部がゼロでなくてはならない。すなわち、

$$Aw_0\cos(\psi_0 - \psi) + B[w_0'\cos(\psi_0 - \psi) - \psi_0' w_0\sin(\psi_0 - \psi)] - w = 0$$
$$Aw_0\sin(\psi_0 - \psi) + B[w_0'\sin(\psi_0 - \psi) + \psi_0' w_0\cos(\psi_0 - \psi)] = 0$$

あとはこの連立方程式を解けばよい。簡単な計算の後に次のような答を得る。

$$A = +w_0' w\sin(\psi_0 - \psi) + \frac{w}{w_0}\cos(\psi_0 - \psi)$$
$$B = -w_0 w\sin(\psi_0 - \psi)$$

3.　＊ギリシャ文字がややこしいので注意。

(i) 与えられた変数変換により

$$\zeta - \eta = (\xi - \eta)\sin^2 t$$
$$\xi - \zeta = (\xi - \eta)\cos^2 t$$
$$\mathrm{d}\zeta = (\xi - \eta) 2 \sin t \cos t \mathrm{d}t$$

であり定積分 I は

$$I = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t \, (\xi - \eta)^{-1/2} (\cos t)^{-1} \cdot (\xi - \eta)^{-1/2} (\sin t)^{-1} \cdot (\xi - \eta) 2 \sin t \cos t = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t \; 2 = \pi$$

(ii) 式 (6) の $w(\zeta)$ を式 (5) の積分変数を η とした式で表す。

$$\mathcal{A}w = \pi^{-1/2} \int_0^{\xi} \mathrm{d}\zeta \, (\xi - \zeta)^{-1/2} \pi^{-1/2} \int_0^{\zeta} \mathrm{d}\eta \, (\zeta - \eta)^{-1/2} u(\eta)$$

ζ と η の積分順序を交換して

$$\mathcal{A}w = \pi^{-1} \int_0^{\xi} \mathrm{d}\eta \, u(\eta) \int_{\eta}^{\xi} \mathrm{d}\zeta \, (\xi - \zeta)^{-1/2} (\zeta - \eta)^{-1/2}$$

この 2 項目の積分は前問で得られているので結局

$$\mathcal{A}w = \int_0^{\xi} \mathrm{d}\eta \, u(\eta) \qquad \cdots (2)$$

となる。

(iii) 前問の結果の式 (2) の両辺を ξ で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \mathcal{A}w = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \int_0^{\xi} \mathrm{d}\eta \, u(\eta) = u(\eta)$$

すなわち、この左辺は w の逆写像 $\mathcal{A}^{-1}w$ に他ならない。よって、

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \mathcal{A}$$

と表すことができる。

(iv) 式 (6) に $w(\xi) = \xi^2$ を代入して計算していく

$$\mathcal{A}w = \pi^{-1/2} \int_0^{\xi} \mathrm{d}\zeta \, (\xi - \zeta)^{-1/2} \zeta^2 = 4\pi^{-1/2} \int_0^{\xi} \mathrm{d}\zeta \, (\xi - \zeta)^{1/2} \zeta$$
$$= \frac{8}{3} \pi^{-1/2} \int_0^{\xi} \mathrm{d}\zeta \, (\xi - \zeta)^{3/2} = \frac{16}{15} \pi^{-1/2} \xi^{5/2}$$

前問の結果より

$$u(\xi) = \mathcal{A}^{-1} w = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \mathcal{A}w = \frac{8}{3} \pi^{-1/2} \xi^{3/2}$$

となる。

■ 教育 物理 解答

1. **(i)** 地球の重力場から受ける力を代入するとロケットの運動方程式は次のようになる。

$$m\left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right] = F_r = -\frac{GMm}{r^2} \qquad \cdots (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[mr^2\dot{\theta}\right] = rF_\theta = 0 \qquad \cdots (2)$$

角運動量の z 成分は $L_z = mr^2\dot{\theta}$ で表されるので、式 (2) から直ちに

$$mr^2\dot{\theta} = \mathrm{const} = L$$

とわかる。$\dot{\theta} = L/mr^2$ を式 (1) に代入して、r 方向の運動方程式は

$$m\left(\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2r^3}\right) = -\frac{GMm}{r^2} \qquad \cdots (3)$$

と書き直される。

(ii) 今、角運動量はゼロなので、式 (3) で $L = 0$ とおいた式に両辺 $\dot{r}$ をかけて積分すると、E を積分定数として

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} = E \qquad \cdots (4)$$

となる。E がロケットの力学的エネルギーである。離脱速度 v_1 は上の式で $E = 0, r = R$ とおいたときの $\dot{r}$ である。

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}} \cdot 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}}{6.38 \times 10^6\,\mathrm{m}}} \simeq 1.12 \times 10^4\,\mathrm{m/s}$$

(iii) 離脱速度で発射するので式 (4) で $E = 0$ であり、前問の v_1 を用いると

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v_1\sqrt{\frac{R}{r}} \qquad \therefore \quad \mathrm{d}t = \frac{1}{v_1}\sqrt{\frac{r}{R}}\mathrm{d}r$$

r が R から $4R$ になるのにかかる時間 t は、

$$t = \int \mathrm{d}t = \int_R^{4R}\mathrm{d}r\,\frac{1}{v_1}\sqrt{\frac{r}{R}} = \frac{14}{3}\frac{R}{v_1}$$

$$= \frac{14}{3} \times \frac{6.38 \times 10^6\,\mathrm{m}}{1.12 \times 10^4\,\mathrm{m/s}} \simeq 2700\,\mathrm{sec}$$

(iv) 円軌道なので

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0 \quad r = \mathrm{const} \quad \dot{\theta} = \mathrm{const} = \omega = 2\pi/T$$

である。これらを式 (1) に代入して

$$T^2 = \frac{r^3(2\pi)^2}{GM}$$

を得る。
特に、$r = 4R$ のとき、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(4R)^3}{GM}} = 16\sqrt{2}\pi R\sqrt{\frac{R}{2GM}} = 16\sqrt{2}\pi\frac{R}{v_1} \simeq 40000\,\mathrm{sec} \simeq 11\,\mathrm{hour}$$

であるから、静止衛星の軌道は $4R$ 以上である。

2.　磁場に関するアンペールの定理より

$$\oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_S \vec{i}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S \qquad \cdots (5)$$

であることを用いて各問を解く

(i) 磁場の成分は明らかに ϕ 成分 (直線電流を回る方向) H_ϕ のみである。図 1 の平面で式 (5) を考えると、

$$2\pi\rho H_\phi = -I \qquad \therefore \quad H_\phi = -\frac{I}{2\pi\rho}$$

と求まる。

(ii) これも磁場の成分は H_ϕ のみである。図 2 の 2 つの曲面でそれぞれ式 (5) を考える。角度 θ の立体角が $(1-\cos\theta)/2$ であることを考慮すると、上の曲面では直線電流が下へ流れ、放射電流が上へ流れるので

$$2\pi\rho H_\phi = -I + I\frac{1-\cos\theta}{2} \qquad \therefore \quad H_\phi = -\frac{I}{2\pi\rho}\frac{1+\cos\theta}{2}$$

となり、下の曲面では放射電流が下へ流れるので

$$2\pi\rho H_\phi = -I\frac{1-\cos(\pi-\theta)}{2} \qquad \therefore \quad H_\phi = -\frac{I}{2\pi\rho}\frac{1+\cos\theta}{2}$$

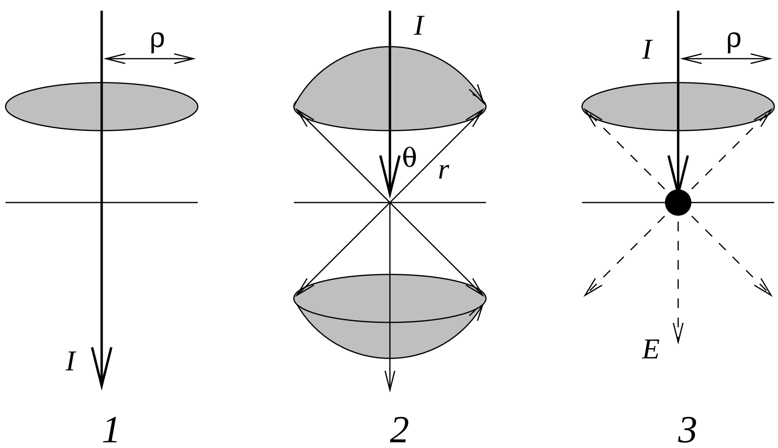
となり、結局どちらでも同じである。
電流密度は デルタ関数とヘビサイド関数 $\theta(z)$ を用いて

$$\vec{i} = -I\delta(x)\delta(y)\theta(z)\vec{e}_z + \frac{I}{4\pi r^2}\vec{e}_r$$

と表される。

(iii) $r=\infty$ に極板を想定すれば、$z=0$ の点電荷とコンデンサをなす。アンペールの定理はコンデンサ間の電場の変化を変位電流としてとらえることにより、普通にその間を電流が流れているとして扱うことができる。よってこの問題は設問 (ii) と全く同じ状況となる。

$$H_\phi = -\frac{I}{2\pi\rho}\frac{1+\cos\theta}{2}$$



3. **(i)** 理想気体の断熱過程では、次の Poisson 関係が成り立つ

$$TV^{\gamma-1} = \text{Const} \qquad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$$

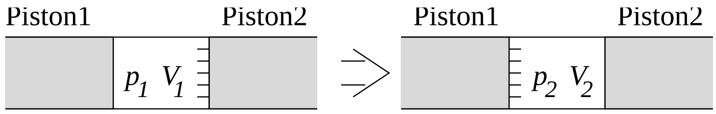
ここで、定積モル比熱 $C_v = \frac{3}{2}R$、定圧モル比熱 $C_p = \frac{5}{2}R$ を用いた。上の関係式より、求める温度を T_1 とすると

$$T_o V_o^{\frac{2}{3}} = T_1(8V_o)^{\frac{2}{3}} \qquad T_1 = \frac{T_o}{4}$$

(ii) 下図のような膨張過程の際、気体は壁の左の領域から押し出されるときにピストンより p_1V_1 の仕事をされ、壁の右の領域に入る時には p_2V_2 の仕事をピストン 2 にしている。その時気体の内部エネルギーの変化を考えると、

$$U_2 - U_1 = p_1V_1 - p_2V_2 \qquad \therefore \quad H_1 = U_1 + p_1V_1 = U_2 + p_2V_2 = H_2$$

よってエンタルピーは保存する。



(iii) (ii) の過程は、始めと終りでエンタルピーが保存しているから、その温度変化は

$$T_2 - T_1 = \int_{p_1}^{p_2} \mathrm{d}p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$$

で与えられる。この被積分関数は、Maxwell の関係式などより

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = -\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p^{-1} = \frac{1}{C_p}$$

すなわち、

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{1}{C_p}\left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V\right] \qquad \cdots (6)$$

で与えられる。今、気体を理想気体とすると、$pV = nRT$ より

$$T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V = \frac{nRT}{p} - V = 0$$

よって、設問 (ii) の過程で温度変化はなく、説問 (i) で求めた温度 $T_o/4$ がこの過程を通じての気体の温度となる。

(iv) 設問 (iii) で求めた式 (6) に、気体の状態方程式

$$pV = nRT + Bp$$

を代入すると

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = -\frac{B}{C_p} \qquad \therefore \quad T = -\frac{B}{C_p}p + A \qquad A = \text{const}$$

を得る。設問 (i) の結果より

$$\frac{T_o}{4} = -\frac{B}{C_p}p_1 + A \qquad p_1 = \frac{1}{32}p_o$$

であったので、設問 (ii) の過程の終状態における温度は、

$$T = -\frac{B}{C_p}\frac{p_1}{10} + A = \frac{9}{320}\frac{B}{C_p}p_o + \frac{T_o}{4}$$

となる。

B の正負によって、$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$ の正負が決まり、よって、設問 (i) の前後での温度の増減が定まる。