

1995 年度 入学試験 一般教育科目 (英語なし)

教育 数学

1. 時間 t の関数 $y(t)$ に関する非線型微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon y^3 \quad \dots (1)$$

を、 $t = 0$ における初期条件

$$y = 1 \quad \frac{dy}{dt} = 0 \quad \dots (2)$$

のもとで考察する。ただし、 ε は微小な正の定数とする。必要なら、 i を虚数単位として、次の恒等式を用いよ。

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta \quad \dots (3)$$

(i) y を ε に関し、

$$y(t; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(t) \quad \dots (4)$$

と展開するとき、 y_0, y_1 に対する方程式および初期条件を求めよ。

(ii) 前問の各方程式を解き、 y_0, y_1 を求めよ。

(iii) 前問の結果より、この展開にもとづく解の適否を、 t が大きくなった場合について論ぜよ。

2. 3 行 2 列の実行列 A を

$$A = U \Lambda V^T \quad \dots (5)$$

のように分解することを考える。ただし T は転置行列を表し、 U, Λ, V はそれぞれ 3 行 2 列、2 行 2 列、2 行 2 列の実行列で、以下の通りである。

$$V^T V = V V^T = U^T U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv I \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0 \quad \dots (6)$$

(i) 式 (5) のように分解ができたとして、行列 $A^T A$ のすべての固有値とそれに対応する固有ベクトルとを $U, \Lambda, V, \lambda_1, \lambda_2$ を用いて表せ。必要なら次の単位ベクトルを用いてよい。

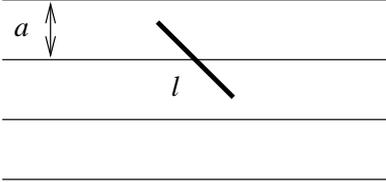
$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) 行列 A が右のように与えられるとき、 $A^T A$ の固有値および長さ 1 の固有ベクトルをすべて求めよ。ただし各固有ベクトルの第 1 要素は非負とする。

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{2} & 3 - \sqrt{2} \\ 3 - \sqrt{2} & 3 + \sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(iii) 前問の行列 A に対して式 (5) を満たす U, Λ, V を求めよ。ただし V の第 1 行の各要素は非負とする。

3. 床一面に引かれた間隔 a の平行線に上から長さ $\ell (\geq a)$ の棒を落としたとき、棒が平行線と交わる確率 $P(\ell)$ を以下の手順にしたがって求めよ。



- (i) 棒の一端が平行線から x の距離 ($0 \leq x \leq a/2$) にあるとき、棒が平行線と交わる確率 $p(x)$ を求めよ。ただし、棒の方位角は床面内で一様に分布するものとする。また、棒の太さは無視する。
- (ii) x が $[0, a/2]$ の区間内で一様に分布するとして、 $P(\ell)$ を求めよ。

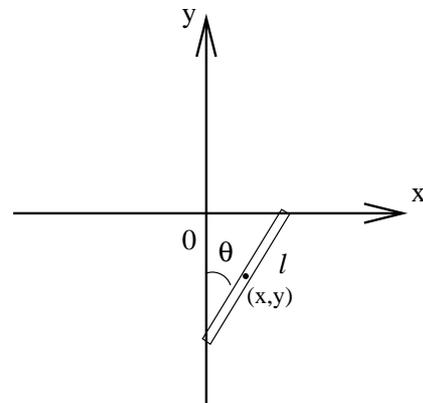
教育 物理

1. 真空中に二つの無限に長い導体の円筒 A(半径 a), および B(半径 b) が同軸に配置されている。ただし、 $a < b$ であり、円筒の厚さは無視できる。

- (i) 円筒 A に単位長さあたり正電荷 Q を与え、円筒 B を接地するとき、円筒 A と B の間および B の外側の電場を求め、そのおおよその様子を図示せよ。また、二つの円筒間の単位長さあたりの静電容量を求めよ。
- (ii) 円筒の軸方向に一樣に電流 I を流す。電流の向きは円筒 A と B で逆向きである。電流が円筒 A と B の間に作る磁束密度を求め、そのおおよその様子を図示せよ。また、円筒 A の表面に働く圧力は、 $\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 a^2}$ であることを示せ。ただし、 μ_0 は真空の透磁率である。

2. 図のように、長さ l 、質量 M の一様な細い棒の両端がそれぞれ水平線 (x 軸) 上と鉛直線 (y 軸) 上を離れないように拘束されて滑らかに動くようにしてある。棒の重心の座標を (x, y) 、棒が鉛直線となす角を θ とする。

- (i) 棒の中点を通り棒に垂直な軸に関する慣性モーメント I は $\frac{1}{12} M l^2$ であることを示せ。
 - (ii) 力学的全エネルギーを書け。
- 棒が x 軸から受ける抗力を R_y 、 y 軸から受ける抗力を R_x とする。
- (iii) x 、 y 、 θ に対する運動方程式を書け。
 - (iv) 設問 (ii) で導いたエネルギーが保存することを運動方程式から示せ。



時刻 $t = 0$ で $\theta = 0$ とし、 θ が増す向きに初期角速度 ω_0 を与えた。

- (v) $t \geq 0$ での棒の角速度を θ と ω_0 で表せ。
- (vi) θ が小さいとき運動方程式を近似的に解き、 θ を時刻 t の関数として与えよ。

3. A さんは、おもちゃ屋でコップの水を飲む動作をいつまでも繰り返す鳥の形をしたおもちゃ(次ページの図。水飲み鳥、と呼ぼう)を見つけた。なぜ動力も熱の供給もなしに動くかが、すぐにはわからなかったので買い求めて調べてみた。まず仕組みは、

(a) 本体は、頭と胴にあたる二つの中空のガラス玉を、首にあたる一本のガラス管でつないだ構造である。体内には一部液体が密封されていて、外部との液体や空気の入りは全くない。頭とくちばしの外側はフェルトでおおわれており、くちばしに水がつくとフェルトに水がしみこむ様になっている。くちばしの内部に隙間はない。ガラス管は、頭とは直接つながっているが、胴体には底近くまで深く差し込まれている。ガラス管の中間にあたる金具の腕を支柱の穴にかけると、支点を中心にして前後に回転できる。実際にかけてみたら全身が少し前かがみになるところ(初期位置、と呼ぶ)で静止した。(図 II-a)。このとき液面は胴体の中程にあり、ガラス管内でも同じ高さであった。

(b) 鳥を動かすには、くちばしの部分に水をたっぷりしみこませてから手を離して静かに初期位置に置く。しばらくすると胴体内の液体がガラス管内をゆっくり上昇して鳥は前に傾き始めた。

鳥はその後次ページのような運動をした。

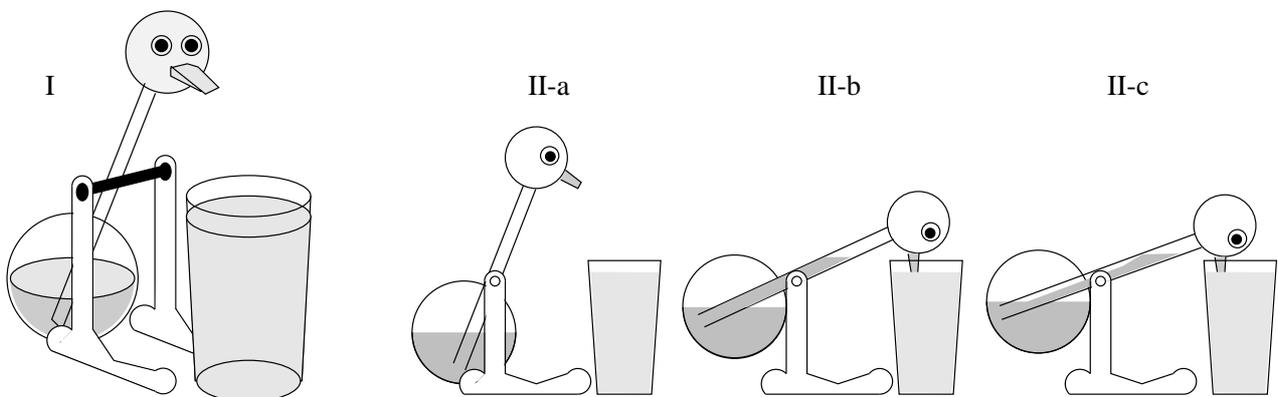
- (c)傾きがしだいに増して、やがてくちばしがコップの水面に達した(図 II-b)。さらに傾きが増し、胴体内の液面がガラス管の下端より下がると、胴体内の気体の一部がガラス管の中に入り込み、管にそって登りはじめた(図 II-c)。その結果、ガラス管の中に上昇していた液体が胴体内に落ちこみ、ガラス管に上っていった気体と入れ替わった。同時に鳥は水から離れ、逆に動きだして、初期位置を通り越すところまで達してから、しばらく前後に小さく振動したあと、初期位置より少し前傾した位置でほぼ停止した。この後は、(c)のはじめに戻って、同じ運動をくり返した。この反復運動を定常水飲み運動と呼ぶ。ただし、「水飲み動作」は、鳥が実際に水を飲むわけではなく、コップの水にくちばしが入って、フェルトが濡れるだけである。
- (d)繰り返しの途中でコップを取り去っても、フェルトが濡れている間は反復運動を続けるが、しだいに周期が長くなってゆき、フェルトが乾くと初期位置で止まった。

これだけでは、まだ動く理由がわからないので次のようないろいろな実験をした。

- (e)気温とコップの水温を測ると、各々 20°C と 20°C であった。コップの水温を下げて、反復運動は続きその周期もあまり変わらなかった。しかし、水温を上げていくとくちばしが水中にある時間が長くなり、ある温度以上になると反復のちくちばしを水に入れた状態で止まってしまった。
- (f)胴体を手のひらで包むと、ガラス管内の液面はすぐに上昇してたちまち頭にまで達した。この際も、また定常水飲み運動の際も、液体の体積にはほとんど変化は見られなかった。
- (g)水温と気温がほぼ同じ状態で、コップまで含めた装置全体をすっぽりおおうような機密の良い透明な箱をかぶせて観察した。時間がたつと、反復時間、特に水中にくちばしを入れている時間がだんだん長くなって、何回かの水飲み動作の後、くちばしを水に入れたままもしくは初期位置より少し前傾した姿勢のまま完全に止まってしまった。その後おおいを静かに取り去ると、すぐに定常水飲み運動に戻った。

ここまでの観察と実験で、Aさんは水飲み鳥の作動機構を理解できたという。

- (i) あなたは定常水飲み運動の作動機構をどう理解するか?
- (ii) 上の(d)~(g)は、あなたの結論に対してどういう根拠を与えたか、あるいは、あなたの結論からこれらの観察結果をどう説明できるか?
- (iii) Aさんは、(g)の状況でさらにある量を測って自分の結論を裏付けた。あなたならどういう実験をするか? ((g)の状況に限らず、裏付けとなればどんな実験でも良い)その実験から、何を期待し何を実証しようと考えてるか?



教育 数学 解答

1. (i) 求めるべきものは ε の 0 次と 1 次に関する項のみなので式 (4) の展開は ε の 1 次までで十分である。

$$y(t; \varepsilon) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + O(\varepsilon^2) \quad \dots (1)$$

この式を微分方程式 (1) と初期条件式 (2) にそれぞれ代入して ε の項で整理すると以下の式が得られる。

$$\ddot{y}_0(t) + y_0(t) = 0 \quad \dots (2)$$

$$\ddot{y}_1(t) + y_1(t) = y_0(t)^3 \quad \dots (3)$$

$$y_0(0) = 1 \quad \dot{y}_0(0) = 0 \quad y_1(0) = 0 \quad \dot{y}_1(0) = 0 \quad \dots (4)$$

これが求める y_0, y_1 に対する方程式と初期条件である。

- (ii) $y_0(t)$ は微分方程式 (2) と初期条件 (4) より明らかに

$$y_0(t) = \cos t$$

である。続いて $y_1(t)$ は微分方程式 (3) より

$$\ddot{y}_1(t) + y_1(t) = \cos^3 t = \frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos 3t \quad \dots (5)$$

である。この非斉次の線形微分方程式を解法は、(a) 非斉次項のない斉次の方程式の一般解を求め、(b) 非斉次項のある方程式の特殊解を求めて、両者の和をとることである。

(a) は明らかに

$$y_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

である。 C_1, C_2 は後で定める定数である。

(b) は非斉次項が 2 つあるのでその個々の項だけの非斉次方程式の特殊解を適当に探す。すなわち、

$$\ddot{y}_1(t) + y_1(t) = \frac{3}{4} \cos t \implies y_1(t) = \frac{3}{8} t \sin t$$

$$\ddot{y}_1(t) + y_1(t) = \frac{1}{4} \cos 3t \implies y_1(t) = -\frac{1}{32} \cos 3t$$

が得られこの和が (b) の特殊解である。

よって $y_1(t)$ の解は初期条件 (4) を考慮して

$$y_1(t) = \frac{1}{32} \cos t - \frac{1}{32} \cos 3t + \frac{3}{8} t \sin t$$

である。

- (iii) 前問で得られた $y_1(t)$ の解の振動の振幅は t の増大と共に激しくなる。この傾向は式 (4) の展開の後続の項でもより顕著となるので、展開は t が十分大きければ収束しない。よってこの展開は妥当ではない。

2. (i) 式 (5) の表式と式 (6) の定義により

$$A^T A = (U \Lambda V^T)^T (U \Lambda V^T) = (V \Lambda^T U^T) U \Lambda V^T = V \Lambda^2 V^T$$

であることがわかる。

指標 i を $i = 1, 2$ として、 $A^T A$ の 2 つの固有値を α_i 、固有ベクトルを \vec{u}_i と表すと前式より

$$V \Lambda^2 V^T \vec{u}_i = \alpha_i \vec{u}_i$$

となる。この両辺に左から V^T をかけると、 $V^T V = I$ より

$$\Lambda^2 V^T \vec{u}_i = \alpha_i V^T \vec{u}_i$$

すなわち、 $V^T \vec{u}_i$ は Λ^2 の固有値 α_i の固有ベクトルである。ところで、

$$\Lambda^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$$

であるから、その固有値は明らかに λ_1^2 および λ_2^2 であり、対応する固有ベクトルはそれぞれ \vec{e}_1 、 \vec{e}_2 である。以上のことより $A^T A$ の固有値は λ_1^2 および λ_2^2 であり、対応する固有ベクトルは、 $V^T \vec{u}_i = \vec{e}_i$ からそれぞれ $\vec{u}_1 = c_1 V \vec{e}_1$ 、 $\vec{u}_2 = c_2 V \vec{e}_2$ である。(c_1, c_2 は定数)

(ii) そのまま計算して

$$A^T A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{2} & 3 - \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 3 - \sqrt{2} & 3 + \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{2} & 3 - \sqrt{2} \\ 3 - \sqrt{2} & 3 + \sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

この固有値 α_i は $\det(A^T A - \alpha_i I) = 0$ より

$$\begin{vmatrix} 10 - \alpha_i & 8 \\ 8 & 10 - \alpha_i \end{vmatrix} = \alpha_i^2 - 20\alpha_i + 36 = 0 \quad \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 18$$

固有ベクトル \vec{u}_i は、長さが 1、第 1 成分が非負の条件より

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。

(iii) $\lambda_i^2 = \alpha_i$ 、 $\lambda_1 \geq \lambda_2$ であるので前問の結果より $\lambda_1 = 3\sqrt{2}$ 、 $\lambda_2 = \sqrt{2}$ となる。よって、

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

次に、 $\vec{u}_i = V \vec{e}_i$ であるので

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

最後に $U = AV\Lambda^{-1}$ であるので

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{2} & 3 - \sqrt{2} \\ 3 - \sqrt{2} & 3 + \sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

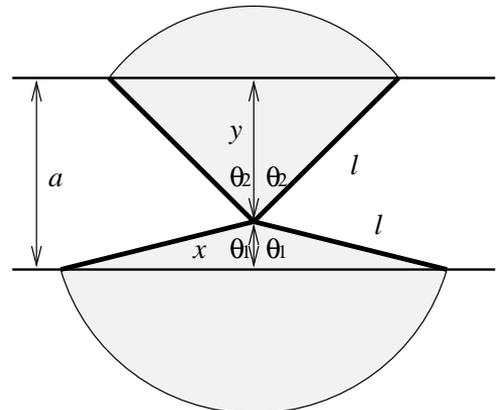
と求まる。

3. (i) 初めに棒の一端が床に着地し、任意の方向に倒れると考えると一般性は失われない。倒れた棒が床の線と交わるには、棒が右図のマスクした領域の向きに倒れた場合である。右図でこの諸量を定義する。 x を固定した場合の棒の線と交わる確率 $p(x)$ は明らかに

$$p(x) = \frac{2\theta_1 + 2\theta_2}{2\pi} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{\pi}$$

である。なお変数の定義から以下の式が成り立っている。

$$\theta_1 = \arccos \frac{x}{\ell} \quad \theta_2 = \arccos \frac{y}{\ell}$$



- (ii) 2本の平行線の中点に関して床は上下対称なので、求める確率は棒の着地点 x を $[0, a/2]$ の範囲に限定して考えて差し支えない。

棒が線と交わる確率 $P(\ell)$ は、前問で得られた結果を規格化に注意して x で積分すれば求まる。すなわち

$$P(\ell) = \frac{1}{a/2} \int_0^{a/2} dx p(x) = \frac{2}{a\pi} \left[\int_0^{a/2} dx \theta_1 + \int_0^{a/2} dx \theta_2 \right]$$

この右辺第2項で $y = a - x$ の変数変換を行い、 θ_1, θ_2 をそれぞれ x, y で表すと

$$P(\ell) = \frac{2}{a\pi} \left[\int_0^{a/2} dx \arccos \frac{x}{\ell} + \int_{a/2}^a dy \arccos \frac{y}{\ell} \right]$$

となるがこの右辺第2項の被積分関数は右辺第1項のそれとまったく同じである。よって2つの積分をまとめて

$$P(\ell) = \frac{2}{a\pi} \int_0^a dx \arccos \frac{x}{\ell}$$

とすることができる。さらに $x = \ell \cos \theta$ と変数変換してこの積分を計算する。

$$\begin{aligned} P(\ell) &= -\frac{2\ell}{a\pi} \int_{\arccos(a/\ell)}^{\arccos(0)} d\theta \theta \sin \theta = \frac{2\ell}{a\pi} \left[\theta \cos \theta - \sin \theta \right]_{\arccos(0)}^{\arccos(a/\ell)} \\ &= \frac{2\ell}{a\pi} \left(\frac{a}{\ell} \arccos \frac{a}{\ell} - \frac{\sqrt{\ell^2 - a^2}}{\ell} + 1 \right) = \frac{2}{\pi} \left(\arccos \frac{a}{\ell} - \frac{\sqrt{\ell^2 - a^2} - \ell}{a} \right) \end{aligned}$$

これが求める確率である。なお $a \rightarrow 0$ または $\ell \rightarrow \infty$ の極限においてこの確率は確かに1になる。

教育 物理 解答

1. (i) 系は軸対称であるから、高さが単位長さの半径 r の同軸の円柱を積分領域に選べば、ガウスの法則より、

$$(2\pi r \cdot 1)E = \frac{q(r)}{\epsilon_0}$$

ただし、 $q(r)$ は、積分領域の中の電荷の総和で、 $a < r < b$ の時、 $q(r) = Q$ 。また、B の電位が 0 であることから、 $r > b$ で、 $q(r) = 0$ 。故に、

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r} & (a < r < b) \\ 0 & (r > b) \end{cases}$$

と求まる。

次に円筒 A の電位 V は、

$$V = - \int_b^a \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

と求まり、電荷と静電容量との関係が $Q = CV$ であることから、円筒間の単位長さあたりの静電容量 C は、

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}$$

と表せる。

- (ii) 系が軸対称であるから、同軸の円周を積分経路に選べば、アンペールの法則より、

$$2\pi r B = \mu_0 i(r)$$

ただし、 $i(r)$ は積分範囲に囲まれる電流の総和で、 $a < r < b$ で I である。故に、

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

である。次に仮想的に、B を固定し、A の半径が可変で、 r_a であるとする。磁場は、AB 間にしか存在しないから、空間中の磁場のエネルギー $U(r_a)$ は、単位長さあたり、

$$U(r_a) = \frac{1}{2\mu_0} \int_{r_a}^b 2\pi r B(r)^2 dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{r_a}$$

と求まる。 r_a を微小量変化させた時に増加する磁場のエネルギーは、圧力に抗して加えた仕事に等しく、圧力を $p(r_a)$ とすると、

$$2\pi r_a p(r_a) = \frac{d}{dr_a} U(r_a) \quad \therefore \quad p(r_a) = -\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r_a^2}$$

よって、圧力は外向きである。

2. (i) 棒の単位長さあたりの質量を $\sigma = M/l$ とすると、慣性モーメント I は、

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} \sigma r^2 dr = \frac{1}{12} M l^2$$

と表される。

- (ii) 運動エネルギー T は重心の並進運動エネルギーと重心の周りの回転運動エネルギーの和である。

$$T = \frac{1}{2} M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

x, y, \dot{x}, \dot{y} を $\theta, \dot{\theta}$ で表すと

$$x = \frac{l}{2} \sin \theta \quad y = -\frac{l}{2} \cos \theta \quad \dot{x} = \frac{l}{2} \dot{\theta} \cos \theta \quad \dot{y} = \frac{l}{2} \dot{\theta} \sin \theta \quad \dots (1)$$

となるので、これらで T を整理すると

$$T = \frac{1}{6} M l^2 \dot{\theta}^2$$

と表される。次に位置エネルギー U は

$$U = Mgy = -\frac{1}{2} Mgl \cos \theta$$

と表される。よって、力学的全エネルギー E は

$$E = T + U = \frac{1}{6} M l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} Mgl \cos \theta \quad \dots (2)$$

と表される。

- (iii) 抗力 R_x, R_y は軸と同じ向きに扱うことにする。
 重心の並進の運動方程式は以下の通りである。

$$M\ddot{x} = R_x \quad M\ddot{y} = R_y - Mg \quad \dots (3)$$

次に回転の運動方程式は以下の通りである。 θ の増加方向が、普通の xy 平面とは違うことに注意する。

$$I\ddot{\theta} = -\frac{l}{2} R_x \cos \theta - \frac{l}{2} R_y \sin \theta \quad \dots (4)$$

- (iv) 式 (3),(4) より抗力 R_x, R_y を消去して整理して

$$\frac{l}{6} \ddot{\theta} = -\ddot{x} \cos \theta - \ddot{y} \sin \theta - g \sin \theta$$

を得る。右辺の時間微分を次のように変形していく

$$\begin{aligned} \frac{l}{6} \ddot{\theta} &= -\frac{d}{dt}(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) - \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta + \dot{y} \dot{\theta} \cos \theta - g \sin \theta \\ &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{l}{2} \dot{\theta} \right) - g \sin \theta = -\frac{l}{2} \ddot{\theta} - g \sin \theta \\ \therefore 2l\ddot{\theta} + 3g \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad \dots (5)$$

ところで式 (2) のエネルギー E を時間微分すると

$$\dot{E} = \frac{1}{3} M l^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + \frac{1}{2} Mgl \dot{\theta} \sin \theta = \frac{1}{6} Ml \dot{\theta} (2l\ddot{\theta} + 3g \sin \theta)$$

これは式 (5) より 0 である。すなわちエネルギー E は保存される。

- (v) エネルギー E が保存されるので $t \geq 0$ で次の式が成り立つ

$$\frac{1}{6} M l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} Mgl \cos \theta = \frac{1}{6} M l^2 \omega_0^2 - \frac{1}{2} Mgl \quad \therefore \quad \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{l} (\cos \theta - 1) + \omega_0^2$$

棒が鉛直逆立ちになる $\theta = \pi$ のときに $\dot{\theta}$ が実数になる場合、つまり $\omega_0 > \sqrt{6g/l}$ の場合には棒は原点の周りを回転することになる。他方、逆立ちとなれない場合には棒は原点の下を振動することになる。 $\dot{\theta}$ は以下の通りである。

$$\dot{\theta} = \begin{cases} + \sqrt{\frac{3g}{l} (\cos \theta - 1) + \omega_0^2} & \omega_0 > \sqrt{\frac{6g}{l}} \text{ の場合} \\ \pm \sqrt{\frac{3g}{l} (\cos \theta - 1) + \omega_0^2} & \omega_0 \leq \sqrt{\frac{6g}{l}} \text{ の場合} \end{cases}$$

- (vi) $\theta \ll 1$ に対して $\sin \theta \approx \theta$ と近似すると式 (5) は

$$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{2l} \theta$$

となる。この解は明らかに

$$\theta = \omega_0 \sqrt{\frac{2l}{3g}} \sin \sqrt{\frac{3g}{2l}} t$$

である。

3. (i) くちばしについた水が蒸発することにより、気化熱を奪い、頭部が胴体よりも冷える。頭部では、凝結が起こり、蒸気圧が下がる。すると、胴体内と頭部の圧力差により、管を液体が上昇する。すると、重心が移動して、水飲み鳥は前傾して、くちばしをぬらす。同時に、体内の液体の量とガラス管の位置が上手く調整してあるため、水を飲んでいる状態で、胴体内の気体が管内を通して頭部へ上昇し、頭部の液体を胴体に戻すと同時に、気圧差を解消する。このようにして、水飲み鳥は、再び立ち上がる。以後、この動作を繰り返す。
- (ii) (d) は、この作動機構は、くちばしが濡れていることが重要であり、コップとその中の水の存在は本質的なものでないことを示して、(i) の作動原理の理解に矛盾しない。
- (e) は、頭部が胴体よりも冷えていることが本質的であることを示している。これも (i) の作動原理の理解に矛盾しない。
- (f) は、体積の変化がほとんど無いのに、手で胴体を包むと液体が上昇したので、液体の上昇は、胴体が暖められて、胴体内の気体の圧力が上昇して、液体を持ち上げたためと考えられる。その際、もしそれが、気体の体積膨張によるものなら、高々、 $\Delta T/273$ 程度の割合しか上昇しない。むしろ、胴体には揮発性の高い液体が入っていると考えるほうが合理的である。数度の変化で蒸気圧が大きく変わる事を考えれば、頭部と胴体が数度の温度差しか無くても、多くの液体を動かすことができ、水飲み鳥を動かすことができると考えられる。これにより、水飲み鳥の動作原理を推測できる。
- (g) はくちばしの水分の蒸発が運動を支えていることを示している。蒸発することにより、気化熱を奪うので、頭部に低温熱源があることになる。これから、胴体部分が頭部に比べて高温であることから、熱力学的に仕事が生まることが説明できる。仕事率は二つの熱源の温度差に比例していて、それはくちばしからの蒸発量による。これは、水飲み鳥をおおうと、しだいに動きがゆっくりになっていったことを良く説明している。
- (iii) 頭部と胴体に 0.1 度程度まで分かる温度計（熱電対）を、水飲み鳥の動作に支障が出ないように取り付け、水飲み鳥の動作状況と温度変化を観察する。覆いがしてあり、中に水があれば、しだいに内部は飽和蒸気圧に達する。よって、時間経過とともに、頭部と胴体の温度差の一動作周期あたりの最大値が小さくなるはずである。また、それに伴って、動作の周期が延びるはずである。それらの関係を実証する。