1996年度　入学試験 一般教育科目（英語なし）

■ 教育 数学

1. 実変数 x, y, z に関する二次形式

$$f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - \sqrt{6}xy + \sqrt{6}yz \qquad \cdots (1)$$

について、以下の設問に答えよ。

(i) ベクトル $\vec{r}$ を

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とし、$f(x,y,z) = \vec{r}^{T} A \vec{r}$ と表したとき、対称行列 A の固有値と単位固有ベクトル (第 2 成分は非負) を求めよ。ここでは $\vec{r}^{T}$ は $\vec{r}$ の転置を表す。

(ii) 上で求めた A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対応する単位固有ベクトル $\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}$ を並べて 3 行 3 列の行列 $P = (\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3})$ を作る。P による座標変換

$$\vec{r} = P\vec{r}', \qquad \vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad \cdots (2)$$

を行った場合、$f(x,y,z)$ がどのような形に変換されるかを求めよ。また、P によって変換されるベクトルはその大きさを変えないことを示せ。

(iii) P による変換をある軸のまわりの回転とみなした時、この回転軸の方向ベクトルを求めよ。

(iv) $P^n = E$ となる最小の自然数 n を求めよ。ただし E は 3 次の単位行列である。

2. 2 次元 (x, y) 平面の上半面 $(-\infty < x < \infty, y > 0)$ における、なめらかな曲線を考える。曲線は、実数パラメータ s によって $(x(s), y(s))$ と表され、次の微分方程式を満たすものとする。

$$yx'' - 2x'y' = 0 \qquad yy'' + x'^2 - y'^2 = 0 \qquad \cdots (3)$$

ただし、関数 $x(s)$ は 2 階微分可能で、$x' = \mathrm{d}x/\mathrm{d}s$, $x'' = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}s^2$ および $x'^2 = (\mathrm{d}x/\mathrm{d}s)^2$ である。関数 $y(s)$ についても同様である。以下の設問に答えよ。

(i) 新しい変数

$$X = \frac{x'}{y}, \qquad Y = \frac{y'}{y} \qquad \cdots (4)$$

を導入して変数 $X(s)$ と $Y(s)$ の満たすべき方程式を求めよ。
さらに次の関係

$$X^2 + Y^2 = C \qquad \cdots (5)$$

が成り立つことを示せ。ただし、C は定数である。

(ii) 方程式 (3) を満たす $(x(s), y(s))$ はどのような曲線群を表すか。$X = 0$ と $X \neq 0$ の場合に分けて、それぞれについて求めよ。ただし $C = 1$ としてよい。

3.

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad \cdots (6)$$

を満たす正の整数 x, y, z の組み合わせを全て求める方法を考える。ここで x, y, z のどの 2 つも、たがいに素 (最大公約数が 1) とする。

(i) x と y は、一方が偶数、もう一方が奇数であることを証明せよ。

(ii) 以下では、偶数の方を x とする。残りの y と z の 2 数から、$A = (z + y)/2, B = (z - y)/2$ と定義するとき、A と B は整数であり、かつ、たがいに素であることを証明せよ。

(iii) 一般に、たがいに素な正の整数 A と B の積が正の整数の 2 乗、すなわち

$$A \cdot B = C^2 \qquad \cdots (7)$$

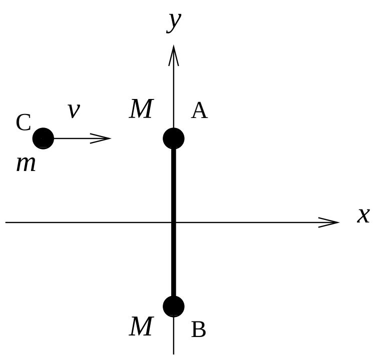
で表せる場合、$A = \alpha^2, B = \beta^2$ となる整数 α, β が存在することを証明せよ。

(iv) 式 (6) を満たす 3 つの整数 x, y, z を 2 つの整数 α, β (ここで $\alpha > \beta > 0$) から導く式を示せ。

(v) 前問の結果を用いて、$\alpha \leq 6$ の範囲で、たがいに素なすべての x, y, z の組み合わせを示せ。

■ 教育 物理

1. 長さ $2a$ で質量の無視できる剛体の棒の両端に、ともに質量 M をもつ質点 A および B が取り付けられ、図のように xy 平面内に静止している。そこに質量 m の質点 C が、図のように直線 $y = a$ に沿って、速度 v で x 軸の正の向きに等速直線運動して、質点 A と衝突した。衝突は完全弾性的であり、衝突後の C の運動は x 軸に平行であるとして、以下の設問に答えよ。ただし摩擦や重力は考えない。



(i) 衝突後の系 (A, B, C) の運動を記述するのに適した複数個の物理量を定義し、それらがどのような力学的保存則により決定されるかを述べ、式で表せ。

(ii) 力学的保存則を解いて、上で定義した物理量を、M、m、a、および v で表せ。

(iii) 衝突後、質点 A および B の速度の x 成分は、どのように時間変化するか。衝突後の経過時間 t の関数として、同一のグラフに図示せよ。特徴的な座標の値も記入すること。

2. 電荷 q、質量 m の荷電粒子の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ で表す。粒子の速度は光速度と比べて十分小さいとして以下の設問に答えよ。

(i) 一様な静磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ がかかっているときの荷電粒子の運動 s で、時刻 $t = 0$ での初期条件 $\boldsymbol{r} = (0, 0, 0)$、$\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = (v_0, 0, u_0)$ を満たすものを求めよ。

(ii) 上記静磁場と振動数 $\omega = qB/m$ をもつ電場 $\boldsymbol{E} = (E\cos\omega t, -E\sin\omega t, 0)$ がかかっているとき、運動方程式の解で、時刻 $t = 0$ での初期条件 $\boldsymbol{r} = (0, 0, 0)$、$\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = (0, 0, 0)$ を満たすものを求めよ。この場合、運動方程式は複素変数 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t + i\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ を用いると扱いやすい。

(iii) 前問について、運動エネルギー K の変化率 $\mathrm{d}K/\mathrm{d}t$ を求めよ。また、電場 $\boldsymbol{E}$ と粒子の速度 $\boldsymbol{v}$ の関係に注目して、この結果を説明せよ。

3. 通常、気体は高温低密度の極限で理想気体に近づくが、一般には理想気体からのずれが観測される。このようなずれを示す気体 1 モルに対して、以下の設問に答えよ。

(i) この気体を体積 V に保って熱容量を測定したところ、温度 $T_1 < T_2$ の間で、$C = 2.5R - gT^{-2}$ と表されることがわかった。但し、R は気体定数であり、g は温度によらない定数である。この測定で、温度 T_1 から温度 T_2 まで気体の温度を上昇させたときの気体のエントロピーの増加量を求めよ。

(ii) 熱膨張率 α と等温圧縮率 κ を測定したところ、次のような関数で表されることがわかった。

$$\alpha \equiv +\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{T}\left(1 + \frac{a}{VT}\right) \quad \cdots (1) \qquad \kappa \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{b}{VT}\right) \quad \cdots (2)$$

但し、V、T、p はそれぞれの気体の体積、温度、圧力である。また、a、b は同じ次元を持つ定数である。V の 2 階偏導関数を考えることにより、$a = 2b$ であることを証明せよ。

(iii) この気体の状態方程式を以下の順で求めよう。先ず式 (2) のみを用いて、等温過程における、p と V の関係を求めよ。次にこの結果を式 (1) に代入して、状態方程式を決定せよ。

■ 教育 数学 解答

1. **(i)** 式 (1) は次のように表される。

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{6}/2 & 0 \\ -\sqrt{6}/2 & 3 & \sqrt{6}/2 \\ 0 & \sqrt{6}/2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

この行列が A である。A の固有値 λ は $\det(A - \lambda E) = 0$ より、

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -\sqrt{6}/2 & 0 \\ -\sqrt{6}/2 & 3-\lambda & \sqrt{6}/2 \\ 0 & \sqrt{6}/2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) - (2-\lambda)\left(\sqrt{6}/2\right)^2 - (4-\lambda)\left(-\sqrt{6}/2\right)^2 \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 23\lambda + 15 = -(\lambda-5)(\lambda-3)(\lambda-1) = 0 \\ &\therefore \quad \lambda = 1,\ 3,\ 5 \end{aligned}$$

各固有値を、次の問いの形式に従って $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 5$ と置く。それぞれの単位固有ベクトル $\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\ \vec{p}_3$ は

$$A\vec{p}_i = \lambda\vec{p}_i \quad (i = 1,2,3) \qquad\qquad |\vec{p}_i| = 1 \quad (i = 1,2,3)$$

から計算すると以下の通りとなる。

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 3/4 \\ \sqrt{6}/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} \qquad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/4 \\ 1/2 \\ -\sqrt{6}/4 \end{pmatrix} \qquad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ \sqrt{6}/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

(ii) 行列 P の成分は次の通りである。

$$P = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \vec{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & -\sqrt{6}/4 & -1/4 \\ \sqrt{6}/4 & 1/2 & \sqrt{6}/4 \\ -1/4 & -\sqrt{6}/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は単位ベクトルで異なる固有値に属するため直交し、$\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j = \delta_{i,j}$ である。$P^{\mathrm{T}}P$ を計算すると

$$P^{\mathrm{T}}P = \begin{pmatrix} \vec{p}_1{}^{\mathrm{T}} \\ \vec{p}_2{}^{\mathrm{T}} \\ \vec{p}_3{}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \vec{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_1 & \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 & \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 \\ \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_1 & \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_2 & \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_3 \\ \vec{p}_3 \cdot \vec{p}_1 & \vec{p}_3 \cdot \vec{p}_2 & \vec{p}_3 \cdot \vec{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ である。また AP を計算すると

$$A\begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \vec{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\vec{p}_1 & \lambda_2\vec{p}_2 & \lambda_3\vec{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \vec{p}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad P^{-1}AP = P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\vec{r} = P\vec{r}\,'$ の変換によって、f は

$$f(x,y,z) = \vec{r}^{\mathrm{T}}A\vec{r} = (P\vec{r}\,')^{\mathrm{T}}A(P\vec{r}\,') = \vec{r}\,'^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}AP\vec{r}\,' = \vec{r}\,'^{\mathrm{T}}(P^{-1}AP)\vec{r}\,'$$

と書きかわる。よって、

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x'^2 + 3y'^2 + 5z'^2$$

となる。また、

$$\vec{r}\cdot\vec{r} = \vec{r}^{\mathrm{T}}\vec{r} = (P\vec{r}\,')^{\mathrm{T}}(P\vec{r}\,') = \vec{r}\,'^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}P\vec{r} = \vec{r}\,'^{\mathrm{T}}\vec{r}$$

であるから P による座標変換によって、ベクトルの大きさは不変である。

(iii) この回転軸の方向ベクトルを $\vec{a}$ と置くと $\vec{a}$ は P による回転によって向きが変わらない。また、P による回転ではベクトルの長さは変わらないので、$P\vec{a} = \vec{a}$ となるはずである。これを解いて

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \mathrm{const}$$

(iv) P はベクトル $\vec{a}$ のまわりの回転だから、その回転角度を θ とする。$\vec{a}$ に垂直なベクトル $\vec{u}$ を適当にとる。$\vec{u}$ を回転して移したベクトル $P\vec{u}$ と $\vec{u}$ のなす角度は θ である。すなわち、

$$\vec{u} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P\vec{u} = \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/4 \\ 1/2 \\ -\sqrt{6}/4 \end{pmatrix} \qquad \cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot P\vec{u}}{|\vec{u}||P\vec{u}|} = \frac{1}{2} \qquad \therefore\quad \theta = 60^\circ$$

P はベクトル $\vec{a} = (1, 0, -1)$ のまわりの 60° の回転だから、P^6 が 360° の回転になる。$P^6 = E$。よって $n = 6$ である。

2. **(i)** 式 (4) より、

$$x' = yX \qquad x'' = y'X + yX' = yXY + yX'$$

$$y' = yY \qquad y'' = y'Y + yY' = yY^2 + yY'$$

これらの式を微分方程式 (3) に代入する。

$$yx'' - 2x'y' = 0 \qquad \therefore\quad X' - XY = 0 \qquad \cdots (1)$$
$$yy'' + (x')^2 - (y')^2 = 0 \qquad \therefore\quad Y' + X^2 = 0 \qquad \cdots (2)$$

$(1)\times X + (2)\times Y$ を計算すると、

$$XX' + YY' = 0 \qquad \therefore\quad X^2 + Y^2 = \mathrm{const} \equiv c^2 \qquad (c > 0) \qquad \cdots (3)$$

(ii) $X \equiv 0$ の場合

$$Y = \pm c \quad\Leftrightarrow\quad \frac{y'}{y} = \pm c \quad\Leftrightarrow\quad y = A\exp(\pm cs) \qquad (A > 0)$$

$$X = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x' = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = \mathrm{const} \equiv B$$

よって、$X \equiv 0$ の場合、$x =$ 一定、$y > 0$ の半直線である。$X \neq 0$ の場合は、$Y^2 - c^2 \neq 0$。式 (2) より、$X^2 = -Y'$ を式 (3) に代入すると、Y だけの微分方程式になる。

$$Y' - Y^2 + c^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 1 = \frac{Y'}{Y^2 - c^2}$$

$$\therefore\quad \int 1\mathrm{d}s = \int \frac{\mathrm{d}Y}{Y^2 - c^2} = \frac{1}{2c}\int\left(\frac{1}{Y-c} - \frac{1}{Y+c}\right)\mathrm{d}Y$$

これより、

$$\log\left|\frac{Y-c}{Y+c}\right| = 2cs+\alpha \qquad (\alpha = \mathrm{const})$$

となる。式 (3) より Y の範囲は $-c<Y<c$ である。このとき、

$$Y = \frac{y'}{y} = (-c)\times\frac{\sinh(cs+\alpha)}{\cosh(cs+\alpha)} \qquad \cdots (4)$$

$$\therefore \quad \log y = -\log[\cosh(cs+\alpha)] + \mathrm{const}$$

$$\therefore \quad y = \frac{a}{\cosh(cs+\alpha)} \qquad (a>0) \qquad \cdots (5)$$

式 (3),(4) より、

$$X^2 = c^2 - c^2\frac{\sinh^2(cs+\alpha)}{\cosh^2(cs+\alpha)} = \frac{c^2}{\cosh^2(cs+\alpha)} \qquad \therefore \quad X = \frac{\pm c}{\cosh(cs+\alpha)} \qquad \cdots (6)$$

式 (5),(6) より、

$$x' = yX = \frac{\pm ac}{\cosh^2(cs+\alpha)} \qquad \therefore \quad x = \pm a\tanh(cs+\alpha)+b \qquad (b:\mathrm{const})$$

s をパラメータとした 2 つの変数 (x,y) が描く曲線は、$1-\tanh^2(cs+\alpha) = 1/\cosh^2(cs+\alpha)$ の関係を用いて、

$$1-\left(\frac{x-b}{a}\right)^2 = \left(\frac{y}{a}\right)^2 \qquad \therefore \quad (x-b)^2+y^2 = a^2 \qquad (y>0)$$

となる。ただし、$y>0$ である。これは半径 a、中心 $(b,0)$ の円の $y>0$ の部分である。

以上より、$X\equiv 0$ と $X\neq 0$ の場合をまとめて、

x 一定、$y>0$ の半直線。または x 軸上に中心を持つ円の $y>0$ の部分

である。

3. **(i)** まず、x,y,z のどの 2 つも互いに素であるから、

(a)　z が偶数で x,y は奇数

(b)　z が奇数で x,y のどちらかが偶数

(c)　x,y,z はすべて奇数

の 3 つの場合のどれかであることが分かる。

(a) の場合

正の整数 l,m,n を用いて $z=2l, x=2m-1, y=2n-1$ と書ける。このとき

$$x^2+y^2 = (2m-1)^2+(2n-1)^2 = 4(m^2+n^2-m-n)+2 \neq 4 \text{ の倍数}$$

である。一方

$$z^2 = 4l^2 = 4 \text{ の倍数}$$

だから、$x^2+y^2=z^2$ を満たさない。

(b) の場合

$z=2l-1,\ x=2m,\ y=2n-1$ としてよい。このとき、

$$x^2+y^2 = (2m)^2+(2n-1)^2 = 4(m^2+n^2-n)+1$$

であり、

$$z = (2l-1)^2 = 4(l^2-l)+1$$

なので、$x^2+y^2,\ z^2$ のどちらも 4 の倍数 +1 で矛盾はしない。

(c) の場合

$z=2l-1,\ x=2m-1,\ y=2n-1$ とすると、$x^2+y^2 = 4(n^2+m^2-m-n)+2 =$ 偶数、

$z^2 = 4(l^2-l)+1 =$ 奇数 となって $x^2+y^2=z^2$ に反する。

よって、z は奇数、x,y の片方は奇数、片方は偶数であることが言えた。

(ii) x を偶数、y を奇数と決めると、正の整数 l, m, n を用いて $x = 2m, y = 2n - 1, z = 2l - 1$ と書ける。$A = (z+y)/2,\ B = (z-y)/2$ と置く。逆に、z, y は A, B を用いて

$$z = A + B \qquad y = A - B$$

と書かれる。

$$A = \frac{(2l-1)+(2n-1)}{2} = l + n - 1, \qquad B = \frac{(2l-1)-(2n-1)}{2} = l - n$$

である。よって、A, B は整数である。

もし、A と B が共通の因子 k(整数) を持ち、$A = ka,\ B = kb$ $(a, b$:整数$)$ と書けると仮定すると、

$$z = A + B = k(a+b) \qquad y = A - B = k(a-b)$$

となり、z, y が互いに素であるという条件に矛盾する。したがって、A と B は互いに素である。

(iii) C を素因数分解する。

$$C = (c_1)^{n_1} \cdot (c_2)^{n_2} \cdots (c_p)^{n_p}$$

と書けたとすると

$$A \cdot B = C^2 = (c_1)^{2n_1} \cdot (c_2)^{2n_2} \cdots (c_p)^{2n_p}$$

である。問題文の仮定より、A, B は互いに素な整数であるから、C^2 の因数の $c_1, \cdot c_2, \cdots c_p$ は A, B どちらかのみの因数である。$c_1, \cdot c_2, \cdots c_p$ を適当に並び替えて、$c_1, \cdots c_q$ は A の因数、$c_{q+1}, \cdots c_p$ は B の因数とすることができる。すなわち、

$$A \cdot B = C^2 = \overbrace{(c_1)^{2n_1} \cdot (c_2)^{2n_2} \cdots (c_q)^{2n_q}}^{A} \overbrace{(c_{q+1})^{2n_{q+1}} \cdots (c_p)^{2n_p}}^{B}$$

$$\alpha \equiv (c_1)^{n_1} \cdots (c_q)^{n_q} \qquad \beta \equiv (c_{q+1})^{n_{q+1}} \cdots (c_p)^{n_p}$$

とおけば $A = \alpha^2,\ B = \beta^2$ である。

(iv) $x = 2C$ と置くと、$x^2 = z^2 - y^2$ より、$(2C)^2 = (A+B)^2 - (A-B)^2 = 4A \cdot B$、つまり、$C^2 = A \cdot B$ となる。(ii) で、$A = (z+y)/2, B = (z-y)/2$ が互いに素な正の整数であることを示したので、(iii) の結果を使うことができて、2 つの整数 α, β を用いて $A = \alpha^2,\ B = \beta^2$ と書ける。このとき、$C = \alpha\beta$ である。よって、

$$x = 2C = 2\alpha\beta, \qquad y = A - B = \alpha^2 - \beta^2, \qquad z = A + B = \alpha^2 + \beta^2$$

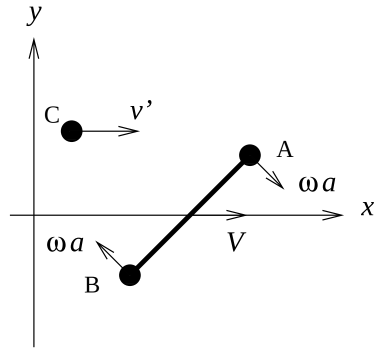
とすればよい。ただし、y, z は奇数なので、α, β の片方は奇数、片方は偶数でなければならない。α, β は互いに素でなければならない。そうでなければ y と z が共通の因数を持つことになって互いに素であるという条件を満たさない。

(v) (iv) の結果から

α	β	x	y	z
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	3	24	7	25
5	2	20	21	29
5	4	40	9	41
6	1	12	35	37
6	5	60	11	61

となる。

■ 教育 物理 解答



1. **(i)** 衝突後、2 球 A と B はその重心を x 軸に平行に移動させながら重心を中心として回転運動を行う。衝突後の C の速度を v' とする。衝突後の A と B の重心の速度を V とし、重心を中心とする回転角速度を ω とする。
衝突は瞬間的として C が A に及ぼす撃力を J とする。C は反作用として A から撃力 $-J$ を受ける。
運動量保存則より次の 2 式が成り立つ。

$$mv - J = mv' \qquad \cdots (1)$$

$$J = 2MV \qquad \cdots (2)$$

また角運動量保存則より次の式が成り立つ。

$$aJ = 2Ma^2\omega \qquad \cdots (3)$$

最後にエネルギー保存則より次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}2MV^2 + \frac{1}{2}2Ma^2\omega^2 \qquad \cdots (4)$$

以上 4 式がこの系を支配する保存則である。

(ii) 式 (2) と式 (3) より $a\omega = V$ がわかる。これと式 (4) より $mv^2 - mv'^2 = 4MV^2$ となる。
さらに式 (1) と式 (2) より $mv - mv' = 2MV$ がわかる。よって $v + v' = 2V$ となる。
これらより次の諸量が求まる。

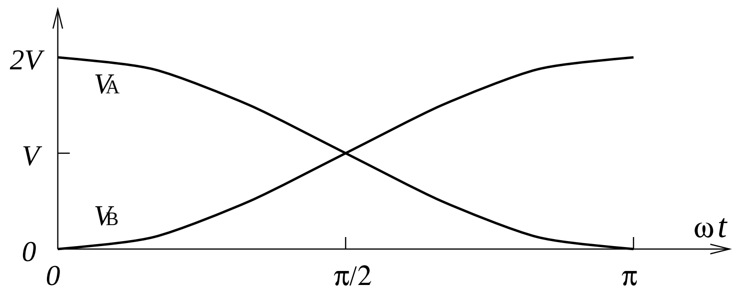
$$V = \frac{m}{m+M}v \qquad v' = \frac{m-M}{m+M}v \qquad \omega = \frac{m}{m+M}\frac{v}{a}$$

(iii) 衝突後の A と B の速度をそれぞれ V_A、V_B と表す。明らかに

$$V_A = V + a\omega\cos\omega t = \frac{m}{m+M}v\left(1 + \cos\frac{m}{m+M}\frac{v}{a}t\right)$$

$$V_B = V - a\omega\cos\omega t = \frac{m}{m+M}v\left(1 - \cos\frac{m}{m+M}\frac{v}{a}t\right)$$

これより V_A、V_B の時間変化は下図のようになる。



2. **(i)** 運動方程式は $m\ddot{\boldsymbol{r}} = q\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}$ である。成分ごとに表すと

$$\ddot{z} = 0 \qquad \ddot{x} = \frac{qB}{m}\dot{y} \qquad \ddot{y} = -\frac{qB}{m}\dot{x}$$

ここで複素数 w を $w = x + iy$ と定義すると上式は、

$$\ddot{z} = 0 \qquad \ddot{w} = -i\frac{qB}{m}\dot{w}$$

となる。初期条件 $\dot{w}|_{t=0} = v_o$、$\dot{z}|_{t=0} = u_o$ を考慮して積分すると、

$$\dot{z} = u_o \qquad \dot{w} = -i\frac{qB}{m}\left(w + i\frac{m}{qB}v_o\right)$$

さらに、初期条件 $w|_{t=0} = 0$、$z|_{t=0} = 0$ 考慮して積分すると、

$$z = u_o t \qquad w = -i\frac{m}{qB}v_o(1 - e^{-i\frac{qB}{m}t})$$

実数に直して求める荷電粒子の軌道が得られる。

$$z = u_o t \qquad x = \frac{m}{qB}v_o \sin\frac{qB}{m}t \qquad y = \frac{m}{qB}v_o \cos\frac{qB}{m}t - \frac{m}{qB}v_o$$

(ii) 運動方程式は $m\ddot{\boldsymbol{r}} = q\boldsymbol{E} + q\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}$ である。成分毎に表すと

$$\ddot{z} = 0 \qquad \ddot{x} = \frac{qE}{m}\cos\omega t + \frac{qB}{m}\dot{y} \qquad \ddot{y} = -\frac{qE}{m}\sin\omega t - \frac{qB}{m}\dot{x}$$

ここで複素数 w を $w = x + iy$ と定義すると上式は、

$$\ddot{z} = 0 \qquad \ddot{w} = \omega\frac{E}{B}e^{-i\omega t} - i\omega\dot{w}$$

となる。初期条件 $\dot{w}|_{t=0} = 0$、$\dot{z}|_{t=0} = 0$ を考慮して積分すると、

$$\dot{z} = 0 \qquad \dot{w} + i\omega w = i\frac{E}{B}(e^{-i\omega t} - 1)$$

この w に関する微分方程式は非斉次である。特殊解として次の形式の解を仮定する。

$$w = C_1 t e^{-i\omega t} - \frac{E}{\omega B}$$

これを微分方程式に代入して整理することにより $C_1 = iE/B$ が求まる。
次に斉次方程式の一般解として次の形式の解がある。

$$w = C_2 e^{-i\omega t}$$

よって微分方程式の解は、初期条件 $w|_{t=0} = 0$、$z|_{t=0} = 0$ 考慮して

$$w = C_2 e^{-i\omega t} + i\frac{E}{B}te^{-i\omega t} - \frac{E}{\omega B} = i\frac{E}{\omega B}(1 + i\omega t)e^{-i\omega t} - \frac{E}{\omega B}$$

となる。実数にもどして

$$z = 0 \qquad x = \frac{E}{\omega B}(\cos\omega t + \omega t\sin\omega t) - \frac{E}{\omega B} \qquad y = \frac{E}{\omega B}(-\sin\omega t + \omega t\cos\omega t)$$

(iii) 荷電粒子の複素速度 $\dot{w}$ は前問の結果より計算され

$$\dot{w} = \frac{qE}{m}te^{-i\omega t} \qquad \cdots (5)$$

である。よって運動エネルギー K は

$$K = \frac{1}{2}m|\dot{w}|^2 = \frac{q^2E^2}{2m}t^2$$

その時間変化率は

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = \frac{q^2E^2}{m}t$$

である。これは等加速運動をする物体の運動エネルギーの変化の仕方と同じである。式 (5) より荷電粒子の速度 $\boldsymbol{v}$ は電場 $\boldsymbol{E}$ と常に平行であることがわかる。また、その速さ v は

$$v = \frac{qE}{m}t$$

であることより、電場による加速が等加速であることがわかる。つまり粒子は前問で求められた軌道にそって等加速運動を行うのである。その結果運動エネルギーは先に求められたように時間変化するのである。

3. **(i)** エントロピーの定義より、その増加量 ΔS は

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}Q}{T}$$

で定義される。また、$\mathrm{d}Q = C\mathrm{d}T$ であり問題の設定より $C = 2.5R - gT^{-2}$ であるので結局 ΔS は

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{2.5R}{T} - \frac{g}{T^3}\right)\mathrm{d}T = 2.5R\log\frac{T_2}{T_1} + \frac{g}{2}\left(\frac{1}{T_2^2} - \frac{1}{T_1^2}\right)$$

と求まる。

(ii) 式 (1) の両辺を T を一定にしながら p で偏微分する。

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right)_T = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{T} + \frac{a}{VT^2}\right)_T$$

$$\therefore\quad -\frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + \frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial p \partial T} = -\frac{a}{V^2T^2}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{a}{pVT^2}\left(1 + \frac{b}{VT}\right) \qquad \cdots (6)$$

同様に式 (2) の両辺を p を一定にしながら T で偏微分する。

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right)_p = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{p} + \frac{b}{pVT}\right)_p$$

$$\therefore\quad +\frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T - \frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial T \partial p} = -\frac{b}{pV^2T}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - \frac{b}{pVT^2} = -\frac{b}{pVT^2}\left(2 + \frac{a}{VT}\right) \qquad \cdots (7)$$

式 (6) と 式 (7) の両辺を足すことで次の関係を得る。

$$a\left(1 + \frac{b}{VT}\right) = b\left(2 + \frac{a}{VT}\right) \qquad \therefore\quad a = 2b$$

(iii) 式 (2) の T を定数とみなして偏微分を常微分に置き換えて変形すると、

$$\frac{\mathrm{d}V}{V + b/T} = -\frac{\mathrm{d}p}{p} \qquad \therefore\quad V = -\frac{b}{T} + \frac{C_1(T)}{p}$$

ここで $C_1(T)$ は p に依存しない T のある関数である。
この V の表式を 式 (1) に代入して整理すると

$$\frac{\mathrm{d}C_1(T)}{\mathrm{d}T} = \frac{C_1(T)}{T} \qquad \therefore\quad C_1(T) = C_2T$$

ここで C_2 はある定数である。
これらより気体の状態方程式は

$$V = -\frac{b}{T} + \frac{C_2T}{p}$$

であるが、$b \to 0$ の極限でこの気体は理想気体となる境界条件を課すことで $C_2 = R$ がわかる。よって、

$$V = -\frac{b}{T} + \frac{RT}{p}$$