

# 1998 年度 入学試験 一般教育科目

## 教育 英語

### 1. 次の英文を読み、以下の設問に答えなさい

In 1961, during the very month that President John F. Kennedy launched the race to the moon, K. Watson, B. C. Murray and H. Brown of the California Institute of Technology noted the importance of the fact that some craters in the moon's polar regions are permanently in shadow. Rather than being subjected to two weeks of blistering rays from the sun each lunar month, these sites remain eternally dark and frigid. Such "cold traps", they argued, might snare water dumped on the lunar surface by crashing comets or spewed forth by lunar volcanoes. And over the aeons, inky crater floors near the poles might accumulate substantial amounts of ice. Those deposits would be immensely valuable to people on future lunar bases, who could distill water from them or separate out the oxygen and hydrogen to use as rocket propellant. It took nearly three decades, but the latest robot probe, Lunar Prospector, has seemingly confirmed that frozen caches of water can indeed be found on the moon.

Because none of the Apollo missions visited the moon's poles, the (ア)proposal of Watson, Murray and Brown had remained untested for 30 years. The first experimental indication came when the Department of Defense and National Aeronautics and Space Administration sent a probe called (a)Clementine into a polar orbit around the moon in 1994.

Clementine found evidence for ice by bouncing radar signals off the lunar surface and back to antennas on the earth. Some of the signals that were returned suggested that ice might be present near the moon's south pole. Yet Clementine uncovered no indications of ice at the north pole, even though the probe flew much lower there, and the radar experiment should have been more sensitive to ice on the surface.

A 1994 report by the late (b)E. M. Shoemaker and two colleagues at the U.S. Geological Survey noted that the south pole of the moon contains "much larger" areas of permanent shadow than the north does, although just how much was hard to say. So Clementine's finding evidence for ice only in the south seemed to make some sense. But in 1997 (c)three radio astronomers reported that radar reflections of the type seen by Clementine could also be found for sunlit parts of the moon, casting doubt on this earlier indication of an icy southern pole. (イ)And the latest results from Lunar Prospector have completely reversed the bias that had, up to this point, placed the moon's south pole in the spotlight.

According to (d)A. B. Binder of the Lunar Research Institute, the leader of the Lunar Prospector science team, measurements from the spacecraft show "about twice as much water ice in the north polar regions as in the south polar regions." Actually, the relevant instrument on Lunar Prospector can only sense the presence of hydrogen. The conclusion that the hydrogen detected is from water, Binder admits, is (ウ)"a leap of faith" but a logical one. The ice is apparently mixed with a great deal of rock, so that it makes a tiny fraction of the lunar soil. However, the ice-tinged soil may extend a couple of meters deep.

Binder does not yet know why the new results from Lunar Prospector show more ice in the north than in the south. He suggests that the shadow maps previously obtained from Clementine may have been misleading. Unfortunately the mystery remains unsolved for the moment: Lunar Prospector carries no camera, so the scientists cannot just take a quick look.

snare: 捕らえる

spewed: はき出される

aeons: 永遠

propellant: (ロケット等の)推進剤

caches: 隠し場

leap: 跳躍

(i) 下線部(ア)の proposal とは何か説明せよ

(ii) 下線部(イ)を和訳せよ

(iii) 下線部 (ウ) にはどういう意味が込められているか。

(iv) 下線部 (a),(b),(c),(d) による主張点ないし観測結果を、その相互関係がわかるように要約せよ。

2. つるまきバネ (coil spring) に重りをぶら下げると、その自然長から  $x(m)$  だけ伸びる。重りがバネに及ぼす力  $F(N)$  は、フックの法則 (Hooke's law) より、 $F = kx$  と書ける。この時の比例定数  $k(N/m)$  をそのバネのバネ定数 (spring constant) という。このフックの法則を確かめ、バネ定数  $k$  を測定する実験を行った。その測定結果は下図のグラフに  $x$  と  $F$  の関係として与えられている。

この実験を報告するレポートを英文で書け。ただし、1. 実験の目的、2. 実験方法、3. 結果、4. 考察、5. 結論のセクションは、数行程度の記述で良い。必要ならば、解答用紙に適切な図を書き、それを参照しながら説明してもよい。

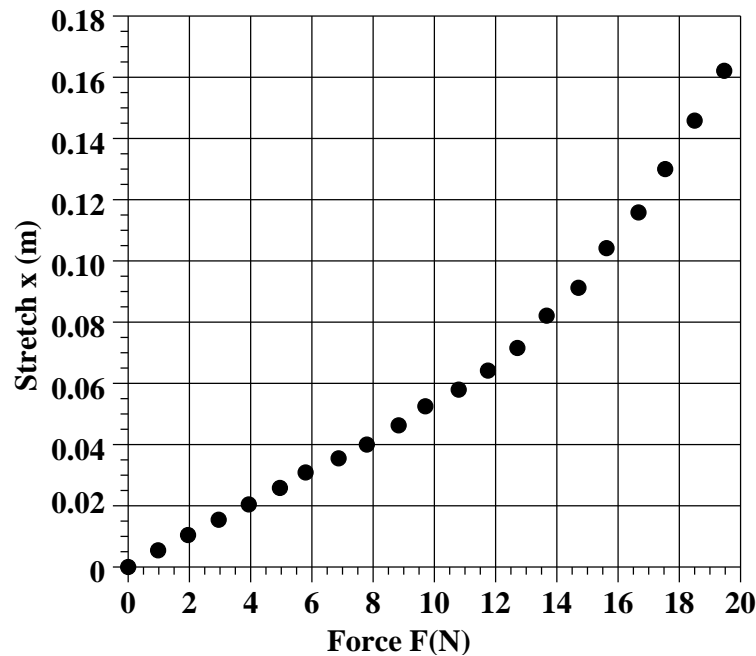


Fig. 1

# 教育 数学

1. 以下の設問に答えよ。

(i)  $\alpha$  を実数としたときに次の積分を複素積分の方法を用いて求めよ。

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin \alpha x}{x}$$

(ii) 区間  $[-\pi, \pi]$  で定義された関数  $f(x) = |x|$  のフーリエ級数展開を次のように表したとする:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad x \in [-\pi, \pi]$$

このとき  $a_n (n = 0, 1, 2, \dots), b_n (n = 1, 2, \dots)$  を求め、この結果を用いて、次式を証明せよ。

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

2. 3 行 3 列の実行列  $A = \{a_{ij}\}$  が与えられているとき、行列式  $\det[A - \lambda I]$  はパラメータ  $\lambda$  について 3 次の多項式となる。ただし、 $I$  は単位行列である。上の行列式を次のように書くことにする:

$$F(\lambda) \equiv \det[A - \lambda I] = -\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R$$

このとき以下の設問に答えよ。

(i) 上の 3 次式の係数  $P, Q, R$  は次のように表せることを示せ。

$$P = \text{Tr}A \quad Q = \frac{1}{2} (\text{Tr}A^2 - (\text{Tr}A)^2) \quad R = \det A$$

ここで、 $\text{Tr}$  は行列の対角和を意味する。

(ii) 特に  $P = 0$  のとき、行列  $A = \{a_{ij}\}$  が複素共役の固有値を持つための条件を  $Q, R$  を使って表せ。

3.  $H_n(x) (n = 0, 1, 2, \dots)$  を  $x$  の  $n$  次の多項式で次の性質を満たすものとする。

$$H_n(x) = x^n + (n \text{ より低次の多項式})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2m} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = 0 \quad (n \neq m)$$

(i)  $n = 1, 2, 3$  について  $H_n(x)$  を具体的に構成せよ。ただし次の積分公式を用いて良い。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2m} e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \frac{(2m)!}{4^m m!} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

一般に  $n$  次の多項式  $P(x)$  は  $H_l(x)$  を用いて  $P(x) = \sum_{l=0}^n c_l H_l(x)$  と展開できることを注意し、次の設問に答えよ。

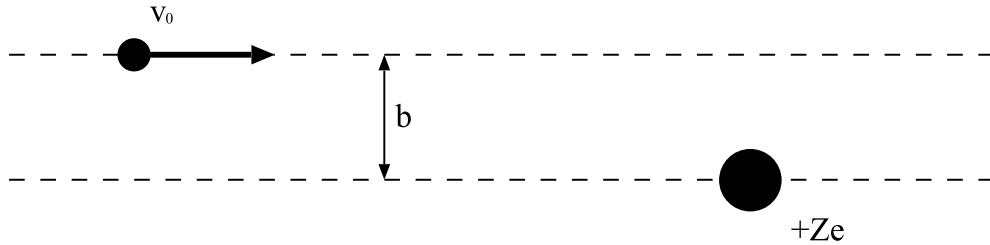
(ii)  $H_n(-x) - (-1)^n H_n(x) = 0$  となることを帰納法を用いて証明せよ。

(iii)  $a_n$  を適当な係数として  $H_n(x)$  が次の形の漸化式を満たすことを証明せよ。

$$\begin{aligned} xH_n(x) &= H_{n+1}(x) + a_n H_{n-1}(x) \\ \frac{d}{dx} H_n(x) &= nH_{n-1}(x) \end{aligned}$$

## 教育 物理

1. 電荷  $+Ze$  を持つ非常に重い原子核に向かって、質量  $m$ 、電荷の  $q$  の荷電粒子が初速度  $v_0$  を持って無限遠から衝突パラメータ（無限遠での粒子の運動方向を延長して得られる直線と標的（ここでは原子核）との距離） $b$  で近づくとき、次の問いに答えよ。ただし、粒子間にはクーロン力のみが働くものとし、原子核の反跳は無視する。また、クーロンの法則の比例定数は  $k$  とせよ。



- (i) 荷電粒子の描く軌道を、衝突パラメータ  $b$  が大きい場合と小さい場合（ただし  $b > 0$ ）、および  $q$  の符号が正と負の場合、計四つの組み合わせについて、同一の図の中に定性的に描け。
- (ii) 荷電粒子が持つ原子核の周りの角運動量  $\vec{L}$  を、原子核を原点とする荷電粒子の位置ベクトル  $\vec{r}$  を用いて表わせ。
- (iii)  $\vec{L}$  が保存することを示せ。
- (iv) 衝突パラメータが  $b$  であるとき、 $\vec{L}$  の大きさを求めよ。
- (v) 軌道上で荷電粒子が原子核に最も近づく点における粒子間の距離を  $s$  とするとき、この点における荷電粒子の速さ  $v_s$  はどう表わされるか。
- (vi)  $q = +e$  とするとき、 $s$  を求めよ。
2. 半径  $a$  の球内に電荷が一様に分布している。球の外側には電荷はないものとする。球内の電荷分布を  $\rho (> 0)$  として、以下の問いに答えよ。
- (i) 球の内外の電場の大きさ  $E(r)$  を、球の中心からの距離  $r$  の関数として求め、そのグラフを描け。
- (ii) 同じく球の内外の静電ポテンシャル  $\phi(r)$  を  $r$  の関数として求め、そのグラフを描け。ただし、無限遠での静電ポテンシャルを 0 とすること。
- (iii) 無限遠から少しずつ電荷を持ってきてこのような電荷分布をつくるのに要する仕事  $W_1$  を計算せよ。
- (iv) 球内および球外の空間の静電場のエネルギーをそれぞれ計算し、全空間の静電場のエネルギー  $W_2$  を求めよ。
3. 媒質中を伝播する音は、媒質の密度の波である。 $\Delta\rho$  を平均密度  $\rho$  からのずれとすると、 $x$  方向に伝播する音波は、波動方程式

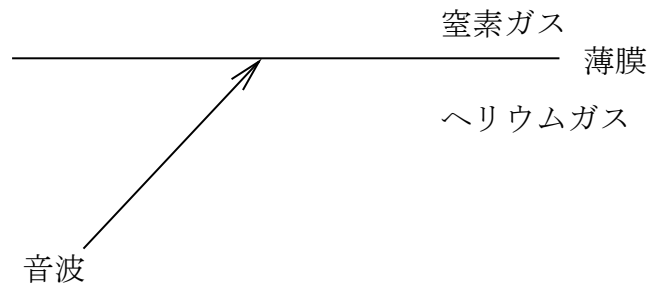
$$k \frac{\partial^2(\Delta\rho)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\Delta\rho)}{\partial t^2}$$

に従う。ここで  $k$  は、断熱過程での  $\rho$  に対する圧力  $P$  の変化率

$$k = \left. \frac{dP}{d\rho} \right|_{adiabatic}$$

である。媒質が、温度の  $T$  理想気体である場合について、以下の問いに答えよ。ただし、理想気体の分子量を  $M$ 、定積比熱に対する定圧比熱の比を  $\gamma$ 、気体定数を  $R$  とする。

- (i) 理想気体の圧力  $P$  が、 $P = \rho RT/M$  と表されることを示せ。
- (ii)  $k$  を、 $M$ 、 $\gamma$ 、 $T$  および  $R$  を用いて表せ。ただし、断熱過程では、 $P/\rho^\gamma = \text{一定}$ であることを用いてよい。
- (iii) ヘリウムガス ( $M = 4.0, \gamma = 5/3$ ) 中の音速は、同じ温度の窒素ガス ( $M = 28.0, \gamma = 7/5$ ) 中の音速の何倍になるか、有効数字 2 桁で答えよ。
- (iv) 理想気体中に、片端を閉じ他端を開いた長さ  $l$  の管をおく。管の中の気柱にたつ音の基本定在波の振動数  $\nu_0$  を、音速を  $v$  として、求めよ。それに基づいて、ヘリウムガス中と窒素ガス中での  $\nu_0$  の違いを簡潔に説明せよ。
- (v) 同じ温度のヘリウムガスと窒素ガスが、図のように薄膜で隔てられているとき、ヘリウムガス中から斜めに入射した音波はどのように進むか、図示し簡潔に説明せよ。



## 教育 英語 解答

### 1. 全訳

1961年 J.F. ケネディー大統領が月へのレースを始めました。その月にカルフォルニア工科大学の K. ワトソンと B.C. Murray、H. ブラウンの三人はいくつかの月の極地域のクレーターは永久に影になっているという事実の重要性に言及した。月の時間で毎月二週間、焼けつくような太陽光線にさらされないでこれらの地域は永久に暗く極寒のままである。彼らが議論するところによると、そのような「コールドトラップ」は彗星の衝突によって月の表面に投げ出された水や、月の火山の噴き出された水を捕らえ、長い間のち、極地方の真っ暗なクレーターの底に、大量の氷をため込んでいる可能性がある。その氷は未来の月面基地の人にとって非常に価値があり、蒸留して水を得たり、酸素と水素に分解してロケットの燃料に使ったりできる。30年近く経ったが、最新のロボット探査機「ルナ・プロスペクター」は、凍った水の場所を本当に月の上で見つけることができる、うわべでは確かめた。

アポロ計画で月の極地方に訪れなかったので、3人の案は30年間手つかずに残った。最初の実験的兆候は国防総省とNASAが1994年に月の極軌道に送った探査機、クレメンタインを打ち上げたときに来た。

クレメンタインは月の表面にレーダーを反射させて氷の証拠を得て、地球に送ってきた。帰ってきた信号のいくつかは氷が南極の近くにあるかも知れないということを示唆していた。しかし、クレメンタインは北極では南極より、より低く飛んでいるのにも関わらず、何の証拠も得られなかった。そして、レーダー実験は表面上の氷にもっと高感度にする方がよかった。

アメリカ地質調査部の故シューメーカーと二人の同僚の1994年の報告はどれくらいかは言い難いが、月の南極の方が、北極よりもより広い永久の影を含むことを指摘した。そうすると、クレメンタインが南極でしか氷の証拠を得られなかったのも理にかなうように思われた。しかし、1997年、三人の電波天文学者は南極の氷のこの初期の証拠に疑いを投げかけ、クレメンタインに見られたレーダー反射のタイプは月の日が射す部分によっても見られることを報告した。(イ)そして、月の探査機の最新の結果は、この時点まででは南極には日が射すという傾向に完全に戻ってしまった。

「月探査チーム」の指導者で、ルナリサーチ学会の A.B. Binder によると、宇宙船での測定は南極よりも北極の方が二倍の氷や水を示している。実際はルナ・プロスペクターの関連のある計器は水素の存在を感知するだけである。観測された水素が水からという結論は Binder も認めているが、論理的な結論でなく、飛躍がある。氷は大量の岩石と混ざっているらしく、月の土の小さなかけらになっている。しかし、氷を含んだ土は2~3メートルの深さまで広がっているだろう。

Binder は未だ「ルナ・プロスペクター」からの新しい証拠が南極より北極により多くの氷がある理由がわかっていない。Binder はクレメンタインから得られた過去の影の地図が間違っているのではないかと言うことを提案している。不幸なことに、今はその謎を解かずに残っている。ルナ・プロスペクターはカメラを持っていかなかったので、科学者は素早く見ることはできない。

(i) 月の極付近のクレーターは太陽の光が常に当たらないので、彗星の衝突や火山の噴火によって、月の表面に出た水を、氷としてため込んでいる可能性があり、その氷を未来の月面基地で利用するという案。

(ii) 全訳を参照

(iii) 水素の存在を感知しただけで、それが水からのものだと判断してしまう飛躍。

(iv) クレメンタインは月の表面から氷の存在を確認した。南極付近から氷の反応があり、北極付近からは何も反応がなかった。シューメーカー達の報告によれば、月の南極の方が北極よりも、より広い影がある。そうするとクレメンタインの結果が正しいように思える。しかし、三人の電波天文学者はクレメンタインの得た氷の反応は月の日が射す部分からも見られることを報告した。また、A.B. Binder によれば、ルナ・プロスペクターによる測定は、南極よりも北極の方が二倍の氷があり、クレメンタインによる観測とは全く逆になっている。

### 2. ここにあげるのは一例。

- (i)
  - Purpose  
I did an experiment with a spring in order to make sure of Hooke's law and obtain the spring constant of it.
  - Procedure  
Fig. 2 shows the equipment of this experiment.  
I hung a  $M[\text{kg}]$  weight from the lower end of the spring and measured the stretch  $x[\text{m}]$  of it.
  - Results  
Fig. 1(the graph in the problem paper) shows the results.  
Here  $F = Mg[\text{N}]$  is the value of the force pulling the spring and  $g[\text{m/s}^2]$  is the gravitational acceleration.  
And the self-weight of the spring is small enough by compared with  $M$ . So it was ignored.

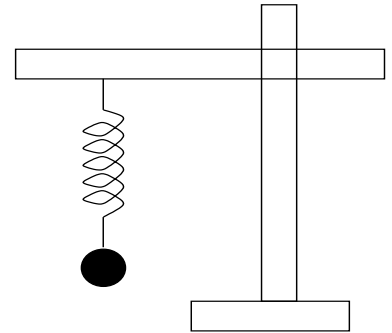


Fig.2

- Consideration  
From Fig. 1 when  $F$  is less than  $10[\text{N}]$ , Hooke's law is obviously valid.  
But, otherwise  $F$  is not in proportion to  $x$ .
  - Conclusion  
A certain length  $x_{max}$  exists and  $F = kx$  (Hooke's law) is valid for  $x < x_{max}$ . And from Fig. 2, the spring constant  $k[\text{N/m}]$  is about  $194$ (for  $x \leq 0.06$ ).
- (ii)
  - The purpose of this experiment  
I made sure of Hooke's law. I measured a spring constant  $k$ .
  - The way of the experiment Procedure  
I hanged weight on a coil spring. I examined a relation between the stretch  $x$  of the coilspring and the force  $F$  to pull the coilspring.
  - The result  
Fig.1 shows the relation between  $x$  and  $F$ .
  - Consideration  
If  $F$  is less than  $12\text{N}$ , we find  $x$  and  $F$  follow Hooke's law. The spring constant  $k$  is  $1.8 \times 10^2[\text{N/m}]$ . If  $F$  is stronger than  $12\text{N}$ ,  $x$  and  $F$  don't follow the law and  $F$  is less than  $kx$ .
  - Conclusion  
We can conclude that if  $F$  is weak sufficiently, the coilspring follows Hooke's law.
- (iii)
  - Purpose  
We make sure a coil spring follows Hooke's law and measure a spring constant  $k[\text{N/m}]$ .
  - Method  
We hanged a weight from the coil spring and measure its stretch.
  - Result  
Fig.1 shows the relationship between  $F$ , which is the force given to the coil spring and  $x$ , which is the stretch of the coil spring.
  - Consideration  
If  $F$  is smaller than about  $12[\text{N}]$ , the coil spring follows Hooke's law and the spring constant  $k$  is about  $200[\text{N/m}]$ .  
If  $F$  is larger than about  $12[\text{N}]$ ,  $x$  increases accelatirely and the coil spring does not follow the hooke's law.
  - Conclusion  
A coil spring follows Hooke's law when the force givn to it is small. But if the force is large, it doesn't follow Hooke's law.
- (iv)
  - Objective  
The objective of this experiment is to confirm Hooke's law for a coil spring and measure the spring constant  $k$  of it.
  - Experimental Method  
The stretch  $x$  of the coil spring was measured for various weights having the different weight.
  - Result  
Fig.1 provides a plot of  $x$  against the force  $F$  acting on the copil spring. From Fig.1 it can be stated that  $x$  increases almost linearly up to  $10[\text{N}]$ , above which it increases superlinearly.

- Discussion

The result is consistent with Hooke's law up to 10[N]. Since  $1/k$  is equal to the slope of the fitted straight line Figure. 1, the spring constant is 190[N/m].

- Conclusion

- It is confirmed that Hooke's law is valid up to 10[N] for this coil spring.
- The spring constant of this spring is 190[N/m].



# 教育 数学 解答

1. (i) まず、 $\alpha = 0$  のときは被積分関数は 0 なので明らかに

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin \alpha x}{x} = 0.$$

次に被積分関数は偶関数であるから、

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin \alpha x}{x} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin \alpha x}{x}.$$

さらに、この積分は

$$\text{Im} \left[ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{i\alpha x}}{x} \right]$$

とかける。

そこで、この積分を図のような積分路で計算する。積分路に囲まれた領域内には極は存在しないので、

$$\int_C \frac{e^{i\alpha z}}{z} = 0.$$

$\alpha > 0$  のときは上半面で計算する。

大きな円弧状では  $z = Re^{i\theta}$  とかける。この時、この円弧上の積分の寄与は

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_1} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz \right| &= \left| \int_0^{\pi} iRe^{i\theta} d\theta \frac{e^{i\alpha R(\cos \theta + i \sin \theta)}}{Re^{i\theta}} \right| = \left| i \int_0^{\pi} d\theta e^{-\alpha R \sin \theta} e^{i\alpha R \cos \theta} \right| \\ &\leq \int_0^{\pi} d\theta e^{-\alpha R \sin \theta} \end{aligned}$$

$\sin \theta$  は、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  で折り返し対称なので、

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta e^{-\alpha R \sin \theta} \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta e^{-\frac{2\alpha R \theta}{\pi}} = \frac{\pi}{\alpha R} (1 - e^{-\alpha R}) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

それゆえ、

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} dx \frac{e^{i\alpha x}}{x} + \int_{\varepsilon}^R dx \frac{e^{i\alpha x}}{x} + \int_{C_2} dz \frac{e^{i\alpha z}}{z} = 0.$$

この最後の項を計算する。 $C_2$  上では  $z = \varepsilon e^{i\theta}$  であるから、この上では  $\varepsilon$  が微小だとすると

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz &= \int_{\pi}^0 \frac{e^{i\alpha \varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_{\pi}^0 d\theta e^{i\alpha \varepsilon e^{i\theta}} = i \int_{\pi}^0 \{1 + i\alpha \varepsilon e^{i\theta} + O(\varepsilon^2)\} d\theta \\ &= -i\pi. \end{aligned}$$

それゆえ、

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = i\pi.$$

$R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$  として虚部をとると、

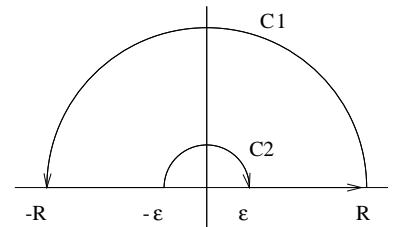
$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin \alpha x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

を得る。

$\alpha < 0$  の場合、

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin \alpha x}{x} = \int_0^{\infty} dx \frac{-\sin |\alpha| x}{x} = - \int_0^{\infty} dx \frac{\sin |\alpha| x}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

を得る。



(ii) まず、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mxdx = \pi \delta_{m,n}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mxdx = 0$$

であるから、

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nxdx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nxdx = -\frac{2}{n^2\pi} \{1 + (-1)^{n-1}\}$$

$$= \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi} & \text{if } n = \text{odd} \\ 0 & \text{if } n = \text{even} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx$$

$$= 0 \quad \text{since } |x| \sin nx \text{ is odd}$$

以上から、

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x.$$

この結果に  $x = 0$  を代入すると、 $\cos(2n+1) \cdot 0 = 1$  であるから、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

を得る。

2. (i)  $\lambda = 0$  とおくと、

$$F(0) = \det A = R$$

であるから、 $R = \det A$  は明らか。残りの項はすべて  $\lambda$  を含むから、 $\det [A - \lambda I]$  の  $\lambda$  を含む項を計算する。

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11} - \lambda) \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} - \lambda \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11} - \lambda) \{a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) - a_{32}a_{23}\} - a_{12}a_{21}(a_{33} - \lambda) - a_{12}a_{31}(a_{22} - \lambda) + (\lambda \text{ を含まない項})$$

$$= -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2$$

$$+ (-a_{11}a_{22} - a_{22}a_{33} - a_{11}a_{33} + a_{32}a_{23} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31})\lambda + (\lambda \text{ を含まない項})$$

ここで、

$$\text{Tr} A^2 = \text{Tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}^2 + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{22}^2 + a_{21}a_{12} + a_{23}a_{32} + a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} + a_{33}^2$$

$$= a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + 2(a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{32}a_{23})$$

であるから、

$$P = \text{Tr}A$$

$$Q = \frac{1}{2} \{ \text{Tr}A^2 - (\text{Tr}A)^2 \}$$

を得る。

(ii)  $P = 0$  のとき、

$$F(\lambda) = -\lambda^3 + Q\lambda + R$$

であるから、

$$F(\lambda) = 0$$

が実数解を 1 つだけ持つ条件を考えればよい。

まず、

$$F'(\lambda) = -3\lambda^2 + Q$$

であるから、

$Q \leq 0$  のとき、任意の  $R$  に対して  $F(\lambda)$  は極値を持たず、単調である。それゆえ実数解を一つだけ持つ。

$Q > 0$  のとき、 $F(\lambda)$  は  $\lambda = \pm\sqrt{\frac{Q}{3}}$  で極値を持つ。 $\lambda^3$  の係数は負なので  $\lambda = -\sqrt{\frac{Q}{3}}$  で極小、 $\lambda = \sqrt{\frac{Q}{3}}$  で極大値をとる。実数解を持つためには極値が同符号ならよいから、

$$F(\lambda) = -\lambda^3 + Q\lambda + R = \frac{1}{3}(-3\lambda^2 + Q)\lambda + \frac{2}{3}Q\lambda + R$$

に注意して、

$$F\left(-\sqrt{\frac{Q}{3}}\right)F\left(\sqrt{\frac{Q}{3}}\right) = R^2 - \frac{4}{27}Q^3 > 0$$

ならよい。これと上の  $Q \leq 0$  を合わせて、求める条件は

$$R^2 - \frac{4}{27}Q^3 > 0$$

である。

3. (i) 明らかに  $H_0(x) = 1$  であるから、

$$H_1(x) = x + C_1$$

$$H_2(x) = x^2 + C_2x + C_2'$$

$$H_3(x) = x^3 + C_3x^2 + C_3'x + C_3''$$

とにおいて、直交性から未定係数を定める。ここで、 $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} x^{2n+1} = 0$  (ただし、 $n = 0, 1, 2, \dots$ ) であることに注意する。

$H_1(x)$  について、

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_0(x)H_1(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} (x + C_1)$$

$$= \sqrt{\pi}C_1$$

これより、 $C_1 = 0$ 。つまり、 $H_1(x) = x$ 。

次に  $H_2(x)$  について。  $H_0(x)$  との内積から、

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} (x^2 + C_2 x + C_2') \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sqrt{\pi} C_2' \end{aligned}$$

これより、  $C_2' = -\frac{1}{2}$ 。  $H_1(x)$  との内積から、

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} x (x^2 + C_2 x + C_2') \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} C_2 \end{aligned}$$

それゆえ、  $C_2 = 0$ 。 よって、  $H_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$

次に  $H_3(x)$  について。  $H_0(x)$  との内積をとると、

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} (x^3 + C_3 x^2 + C_3' x + C_3'') \\ &= C_3 \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} + C_3'' \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \\ &= \sqrt{\pi} \left( \frac{1}{2} C_3 + C_3'' \right) \end{aligned}$$

それゆえ、  $C_3 = -2C_3''$ 。

$H_1(x)$  との内積から、

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} x (x^3 + C_3 x^2 + C_3' x + C_3'') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx x^4 e^{-x^2} + C_3' \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} \\ &= \sqrt{\pi} \left( \frac{3}{4} + \frac{C_3'}{2} \right) \end{aligned}$$

それゆえ、  $C_3' = -\frac{3}{2}$ 。

$H_2(x)$  との内積から、

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \left( x^2 - \frac{1}{2} \right) (x^3 + C_3 x^2 + C_3' x + C_3'') \\ &= C_3 \int_{-\infty}^{\infty} dx x^4 e^{-x^2} + C_3'' \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} - \frac{C_3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} - \frac{C_3''}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \\ &= \sqrt{\pi} \left( \frac{3}{4} C_3 + \frac{C_3''}{2} - \frac{C_3}{4} - \frac{C_3''}{2} \right) \end{aligned}$$

これより、  $C_3 = 0, C_3'' = 0$ 。

以上をまとめて、

$$\begin{aligned} H_1(x) &= x \\ H_2(x) &= x^2 - \frac{1}{2} \\ H_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x \end{aligned}$$

(ii) 帰納法を用いる。

$$H_n(-x) - (-1)^n H_n(x) = 0 \quad \dots (1)$$

$n = 0$  のとき、  $H_0(-x) - (-1)^0 H_0(x) = 1 - 1 = 0$  であるから、(1) は成り立っている。

次に  $n = k - 1$  まで成り立っているとして、  $n = k$  のときを考える。ところで、

$$H_n(x) = x^n + C_n x^{n-1} + \dots$$

であるから、未定係数は  $n$  個ある。一方、 $m = n - 1, \dots, 0$  に対しての直交条件から独立な条件は  $n$  個ある。つまり、 $H_n(x)$  は一意に決まる。

さて、 $0 \leq m < n$  のとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)$$

において  $x \rightarrow -x$  とおきかえると、 $m < n$  に対しては (1) は成り立つので

$$0 = \int_{\infty}^{-\infty} d(-x) e^{-x^2} H_n(-x) H_m(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} (-1)^m H_n(-x) H_m(x)$$

となり、 $H_n(-x)$  は  $H_n(x)$  と同じ直交条件を満たす。すなわち、 $H_n(-x)$  は  $H_n(x)$  に定数倍を除いて一致する。ここで、そもそも

$$H_n(x) = x^n + (n - 1 \text{ 次以下の多項式})$$

であったから、

$$H_n(-x) = (-1)^n x^n + (n - 1 \text{ 次以下の多項式})$$

である。それゆえ、

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

が成り立つ。つまり、 $n = k$  に対しても (1) が成り立つ。

以上から、数学的帰納法により、すべての  $n = 0, 1, \dots$  に対して

$$H_n(-x) - (-1)^n H_n(x) = 0$$

が成り立つ。

(iii) 再び数学的帰納法を用いる。

$n = 1$  のとき、

$$xH_1(x) = x^2 = H_2(x) + a_1 H_0(x) = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

となり、 $a_1 = \frac{1}{2}$  とおけば

$$xH_n(x) = H_{n+1}(x) + a_n H_{n-1}(x) \quad \dots (2)$$

が成り立つ。

次に  $n = k - 1$  まで成り立っていると仮定すると、

$$xH_{k-1}(x) = H_k(x) + a_{k-1} H_{k-2}(x).$$

$n = k$  のとき、

$$xH_k(x) - H_{k+1}(x) = \sum_{l=0}^k c_l H_l(x)$$

とかける。ここでもしも  $c_k \neq 0$  とすると右辺の最高次の項は  $x^k$  である。このとき、左辺は  $x \rightarrow -x$  に対して  $(-1)^{k+1}$  がかかるが、右辺の最高次の項には  $(-1)^k$  がかかる。これは矛盾する。そのため、 $c_k = 0$  でなくてはならない。

$m < k$  に対して、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} (xH_k(x) - H_{k+1}(x))H_m(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_k(x)xH_m(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_k(x)(H_{m+1}(x) + a_m H_{m-1}(x)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_k(x)H_{m+1}(x) \end{aligned}$$

となる。これは  $m+1 = k$  のときのみ 0 でない。つまり、

$$xH_k(x) - H_{k+1}(x) = c_{k-1}H_{k-1}(x)$$

とかける。

そこで、

$$a_k = c_{k-1}$$

とおけば (2) が成り立つ。

以上から、数学的帰納法から、すべての  $n = 0, 1, \dots$  に対して (1) が成り立つ。

次に

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = nH_{n-1}(x)$$

について考える。

再び数学的帰納法を用いる。 $n = 1$  に対しては

$$\frac{d}{dx} H_1(x) = 1 = 1 \cdot H_0(x)$$

となり明らかに成り立つ。

次に  $n = k - 1$  にたいして

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = nH_{n-1}(x) \quad \dots (3)$$

が成り立っているとす。

すると、 $n = k$  に対して

$$H_n(x) = x^n + (n-1 \text{ 次以下の多項式})$$

であるから、

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = nx^{n-1} + (n-2 \text{ 次以下の多項式}) \quad \dots (4)$$

となる。このため、

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = nH_{n-1}(x) + \sum_{l=0}^{n-2} c_l H_l(x)$$

とかける。

上と同様に  $m < n$  に対して  $H_m(x)$  との内積を考える。

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \left( \frac{d}{dx} H_n(x) \right) H_m(x) \\ &= \left[ H_n(x)H_m(x)e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx H_n(x) \frac{d}{dx} (e^{-x^2} H_m(x)) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ H_n(x)(-2x)e^{-x^2} H_m(x) + H_n(x)e^{-x^2} \frac{d}{dx} H_m(x) \right\} \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_n(x)xH_m(x) - \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} mH_n(x)H_{m-1}(x) \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_n(x)(H_{m+1}(x) + a_n H_{m-1}(x)) \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_n(x)H_{m+1}(x) \end{aligned}$$

これは  $m+1=n$  のときのみ 0 でない。すなわち、上で、 $l=0, 1, \dots, n-2$  に対して  $c_l=0$ 。

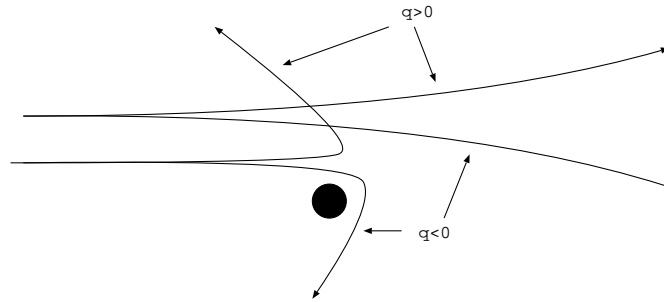
また、(4) より、 $c_{n-1}=n$  である。ゆえに

$$\frac{d}{dx}H_n(x) = nH_{n-1}(x)$$

を得る。これにより、 $n=k$  のときも (3) が成り立つ。以上から数学的帰納法により、(3) が成り立つ。

## 教育 物理 解答

1. (i) 力は  $\frac{kZeq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$  ( $\vec{r}$  は原子核から荷電粒子の方向) で、 $r^2$  が小さいほど力は強いことに注意すると、



- (ii)  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  なので、 $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ 。

ちなみに、 $\vec{r}$  と  $\dot{\vec{r}}$  の関係を求めておくと、荷電粒子の全エネルギーは、 $\frac{1}{2}mv^2 + k\frac{Zeq}{r}$  なので、エネルギーの保存より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + k\frac{Zeq}{r} \\ v^2 &= v_0^2 - \frac{2Zeqk}{mr} \end{aligned} \quad \dots (1)$$

- (iii)  $\vec{L}$  を時間微分すると、

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = m(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) = m(\vec{r} \times \ddot{\vec{r}})$$

運動方程式  $m\ddot{\vec{r}} = \frac{kZeq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$  を使うと、これは 0 になる。よって示された。

- (iv)  $|\vec{L}|$  を求める。保存するので、無限遠で求めればよい。

$$|\vec{L}| = m|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = m|\vec{r} \times v_0| = mbv_0.$$

- (v) 一番近づいた時、 $\vec{v} \perp \vec{r}$ 。よって、 $|\vec{L}| = msv_s = mv_0$  より、 $v_s = v_0 \frac{b}{s}$ 。

- (vi) (1) より、 $v_s^2 = v_0^2 - \frac{2Ze^2k}{ms}$  よって、

$$\begin{aligned} \frac{v_0^2 b^2}{s^2} &= v_0^2 - \frac{2Ze^2k}{ms} \\ s^2 - \frac{2Ze^2k}{mv_0^2} s - b^2 &= 0 \\ s &= \frac{Ze^2k}{mv_0^2} \pm \sqrt{\frac{Z^2e^4k^2}{m^2v_0^4} + b^2}. \end{aligned}$$

$s > 0$  なので、+の方が答。

2. (i) 電荷分布が球対称なので、電場も球対称。

•  $r > a$  のとき。Gauss の法則より、

$$\int E(r)dS = 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} a^3 \rho$$

$$E(r) = \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2}.$$

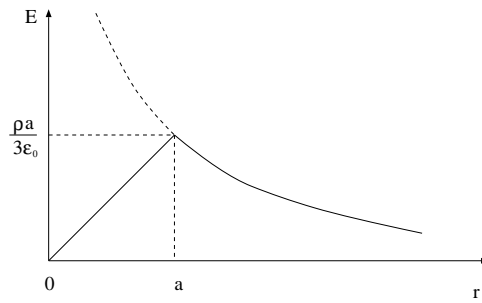
•  $r < a$  のとき。内部電荷は  $\frac{4\pi}{3} r^3 \rho$  より、

$$\int E(r)dS = 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi r^3}{3} \rho$$

$$E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r.$$



よって、グラフにすると、



(ii)  $\vec{E} = -\nabla\phi$  より、 $\phi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int E(r)dr$  なので、

$r > a$  では、

$$\phi(r) = -\int \frac{a^3\rho}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{a^3\rho}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} + A.$$

$r \rightarrow \infty$  で、 $\phi \rightarrow 0$  より、 $A = 0$ 。よって、 $\phi(r) = \frac{a^3\rho}{3\epsilon_0} \frac{1}{r}$ 。

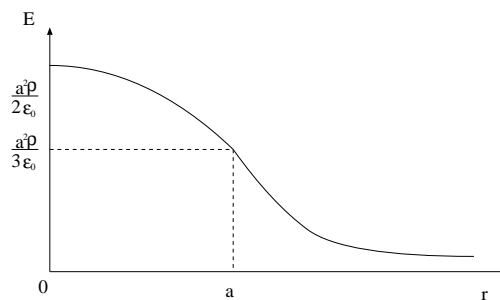
$r < a$  では、

$$\phi(r) = -\int \frac{\rho}{3\epsilon_0} r dr = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + B.$$

$r = a$  で連続より、

$$\begin{aligned} -\frac{\rho a^2}{6\epsilon_0} + B &= \frac{a^2\rho}{3\epsilon_0} \\ B &= \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}. \end{aligned}$$

結局、 $\phi(r) = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}$ 。



(iii) 微小な電荷を無限遠から何回か運んできた後、半径  $a$  の電荷球の電荷密度が  $\rho'$  になっているとする。ここで、さらに微小な電荷  $\Delta q$  を運んでくると、電荷球の電荷密度が  $\Delta\rho = \frac{3}{4\pi a^3} \Delta q$  だけ増える。 $r \sim r+dr$  の微小体積の電荷密度を  $\Delta\rho$  だけ増すのに必要な仕事は、

$$\left(-\frac{\rho'}{6\epsilon_0} r^2 + \frac{a^2\rho'}{2\epsilon_0}\right) 4\pi r^2 \Delta\rho dr.$$

よって、全球の電荷密度を  $\Delta\rho$  だけ増すのに必要な仕事  $\Delta W$  は

$$\Delta W = \int_0^a \left(-\frac{\rho'}{6\epsilon_0} r^2 + \frac{a^2\rho'}{2\epsilon_0}\right) 4\pi r^2 \Delta\rho dr = \frac{2\pi}{\epsilon_0} \Delta\rho \rho' \frac{4}{15} a^5.$$

したがって、電荷密度を  $\rho$  にするまでに必要な仕事  $W_1$  は、

$$W_1 = \int \Delta W = \int_0^\rho \frac{2\pi}{\epsilon_0} \rho' \frac{4}{15} a^2 d\rho' = \frac{4\pi a^5}{15\epsilon_0} \rho^2.$$

(iv) 単位体積あたりの静電場のエネルギー  $u$  は、 $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ 。よって、球内では、

$$u_{in} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \frac{\rho^2}{9\epsilon_0^2} r^2 = \frac{\rho^2}{18\epsilon_0} r^2.$$

したがって、全部で、

$$U_{in} = \int \frac{\rho^2}{18\epsilon_0} r^2 d^3r = 4\pi \frac{\rho^2}{18\epsilon_0} \int_0^a r^4 d^3r = \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_0} \frac{a^5}{5}.$$

球外では、

$$u_{out} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \frac{a^6\rho^2}{9\epsilon_0^2 r^4} = \frac{\rho^2}{18\epsilon_0} \frac{a^6}{r^4}.$$

全部で、

$$U_{out} = \int \frac{\rho^2}{18\epsilon_0} \frac{a^6}{r^4} d^3r = 4\pi \frac{\rho^2}{18\epsilon_0} a^6 \int_a^\infty \frac{1}{r^2} d^3r = \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_0} a^5.$$

以上より、全空間の静電場のエネルギーは、

$$W_2 = \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_0} a^5 \left( \frac{1}{5} + 1 \right) = \frac{4\pi\rho^2}{15\epsilon_0} a^5.$$

3. (i) 理想気体の状態方程式は  $PV = nRT$  で、気体の重さ  $m$  は  $m = nM$  より、 $n = m/M$  で、 $PV = mRT/M$ 。  
 $\rho = m/V$  より、

$$P = \frac{\rho RT}{M}. \quad \dots (2)$$

(ii)

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = C \quad \dots (3)$$

より、 $P = C\rho^\gamma$  である。よって、

$$k = \frac{dP}{d\rho} = C\gamma\rho^{\gamma-1}. \quad \dots (4)$$

$C$  を求める。(3) に (2) を代入すると、

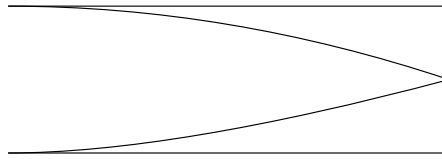
$$\frac{RT}{M} \frac{1}{\rho^{\gamma-1}} = C$$

$$C\rho^{\gamma-1} = \frac{RT}{M}.$$

これを (4) に代入して、 $k = RT\gamma/M$

(iii) 音速を  $v$  とすると、 $\Delta\rho = f(x-vt)$  とおけて、 $kf'' = v^2 f''$ 。よって、 $v = \pm\sqrt{k}$ 。従って、ヘリウムガスの音速は  $\sqrt{\frac{RT}{4} \frac{5}{3}}$ 、窒素ガスの音速は  $\sqrt{\frac{RT}{28} \frac{7}{5}}$  なので、ヘリウムガスの音速は、窒素ガスの音速の  $\sqrt{\frac{5RT}{4 \cdot 3}} \cdot \sqrt{\frac{28 \cdot 5}{7RT}} \approx 2.9$  倍。

- (iv) 閉じた方は固定端で開いた方は自由端である。波長は図から  $\lambda_0/4 = l$  で、 $\lambda v_0 = v$ 。よって、 $v_0 = v/\lambda_0 = v/4l$ 。したがって、ヘリウムガスのほうが窒素ガスより振動数が大きくなる。



- (v) 普通に、速さの速い方から遅い方への入射となる。角度は屈折の法則より、 $\frac{\sin \theta}{\sin \phi} = \frac{v_N}{v_{He}}$  となる。

