1998年度　入学試験 一般教育科目（英語なし）

■ 教育 数学

1. 以下の設問に答えよ。

   (i) α を実数としたときに次の積分を複素積分の方法を用いて求めよ。

   $$\int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{\sin \alpha x}{x}$$

   (ii) 区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(x) = |x|$ のフーリエ級数展開を次のように表したとする:

   $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

   このとき $a_n(n = 0, 1, 2, \cdots), b_n(n = 1, 2, \cdots)$ を求め、この結果を用いて、次式を証明せよ。

   $$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

2. 3 行 3 列の実行列 $A = \{a_{ij}\}$ が与えられているとき、行列式 $\det[A - \lambda I]$ はパラメータ λ について 3 次の多項式となる。ただし、I は単位行列である。上の行列式を次のように書くことにする:

   $$F(\lambda) \equiv \det[A - \lambda I] = -\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R$$

   このとき以下の設問に答えよ。

   (i) 上の 3 次式の係数 P, Q, R は次のように表せることを示せ。

   $$P = \mathrm{Tr}A \qquad Q = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}A^2 - (\mathrm{Tr}A)^2\right) \qquad R = \det A$$

   ここで、Tr は行列の対角和を意味する。

   (ii) 特に $P = 0$ のとき、行列 $A = \{a_{ij}\}$ が複素共役の固有値を持つための条件を Q, R を使って表せ。

3. $H_n(x)(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を x の n 次の多項式で次の性質を満たすものとする。

   $$H_n(x) = x^n + (n\ \text{より低次の多項式})$$
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = 0 \qquad (n \neq m)$$

   (i) $n = 1, 2, 3$ について $H_n(x)$ を具体的に構成せよ。ただし次の積分公式を用いて良い。

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x^{2m} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}\frac{(2m)!}{4^m m!} \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

   一般に n 次の多項式 $P(x)$ は $H_l(x)$ を用いて $P(x) = \sum_{l=0}^{n} c_l H_l(x)$ と展開できることを注意し、次の設問に答えよ。

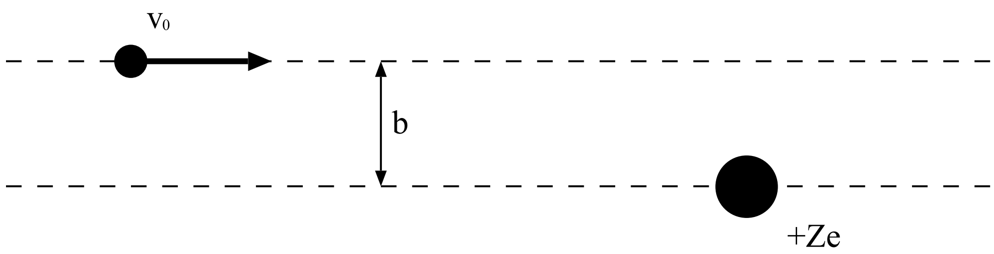
(ii) $H_n(-x) - (-1)^n H_n(x) = 0$ となることを帰納法を用いて証明せよ。

(iii) a_n を適当な係数として $H_n(x)$ が次の形の漸化式を満たすことを証明せよ。

$$xH_n(x) = H_{n+1}(x) + a_n H_{n-1}(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_n(x) = nH_{n-1}(x)$$

■ 教育 物理

1. 電荷 $+Ze$ を持つ非常に重い原子核に向かって、質量 m、電荷の q の荷電粒子が初速度 v_0 を持って無限遠から衝突パラメータ (無限遠での粒子の運動方向を延長して得られる直線と標的 (ここでは原子核) との距離) b で近づくとき、次の問いに答えよ。ただし、粒子間にはクーロン力のみが働くものとし、原子核の反跳は無視する。また、クーロンの法則の比例定数は k とせよ。



   (i) 荷電粒子の描く軌道を、衝突パラメータ b が大きい場合と小さい場合 (ただし $b > 0$)、および q の符号が正と負の場合、計四つの組み合わせについて、同一の図の中に定性的に描け。

   (ii) 荷電粒子が持つ原子核の周りの角運動量 $\vec{L}$ を、原子核を原点とする荷電粒子の位置ベクトル $\vec{r}$ を用いて表わせ。

   (iii) $\vec{L}$ が保存することを示せ。

   (iv) 衝突パラメータが b であるとき、$\vec{L}$ の大きさを求めよ。

   (v) 軌道上で荷電粒子が原子核に最も近づく点における粒子間の距離を s とするとき、この点における荷電粒子の速さ v_s はどう表わされるか。

   (vi) $q = +e$ とするとき、s を求めよ。

2. 半径 a の球内に電荷が一様に分布している。球の外側には電荷はないものとする。球内の電荷分布を $\rho (> 0)$ として、以下の問いに答えよ。

   (i) 球の内外の電場の大きさ $E(r)$ を、球の中心からの距離 r の関数として求め、そのグラフを描け。

   (ii) 同じく球の内外の静電ポテンシャル $\phi(r)$ を r の関数として求め、そのグラフを描け。ただし、無限遠での静電ポテンシャルを 0 とすること。

   (iii) 無限遠から少しずつ電荷を持ってきてこのような電荷分布をつくるのに要する仕事 W_1 を計算せよ。

   (iv) 球内および球外の空間の静電場のエネルギーをそれぞれ計算し、全空間の静電場のエネルギー W_2 を求めよ。

3. 媒質中を伝播する音は、媒質の密度の波である。$\Delta\rho$ を平均密度 ρ からのずれとすると、x 方向に伝播する音波は、波動方程式

$$k\frac{\partial^2(\Delta\rho)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\Delta\rho)}{\partial t^2}$$

に従う。ここで k は、断熱過程での ρ に対する圧力 P の変化率

$$k = \left.\frac{dP}{d\rho}\right|_{adiabatic}$$

である。媒質が、温度の T 理想気体である場合について、以下の問いに答えよ。ただし、理想気体の分子量を M、定積比熱に対する定圧比熱の比を γ、気体定数を R とする。

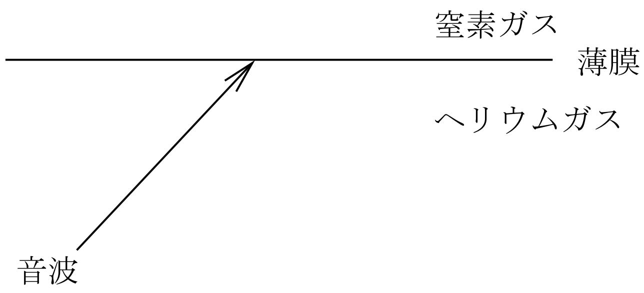
(i) 理想気体の圧力 P が、$P = \rho RT/M$ と表されることを示せ。

(ii) k を、M、γ、T および R を用いて表せ。ただし、断熱過程では、P/ρ^{γ} = 一定であることを用いてよい。

(iii) ヘリウムガス ($M = 4.0, \gamma = 5/3$) 中の音速は、同じ温度の窒素ガス ($M = 28.0, \gamma = 7/5$) 中の音速の何倍になるか、有効数字 2 桁で答えよ。

(iv) 理想気体中に、片端を閉じ他端を開いた長さ l の管をおく。管の中の気柱にたつ音の基本定在波の振動数 ν_0 を、音速を v として、求めよ。それに基づいて、ヘリウムガス中と窒素ガス中での ν_0 の違いを簡潔に説明せよ。

(v) 同じ温度のヘリウムガスと窒素ガスが、図のように薄膜で隔てられているとき、ヘリウムガス中から斜めに入射した音波はどのように進むか、図示し簡潔に説明せよ。



■ 教育 数学 解答

1. **(i)** まず、$\alpha = 0$ のときは被積分関数は 0 なので明らかに

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{\sin \alpha x}{x} = 0.$$

次に被積分関数は偶関数であるから、

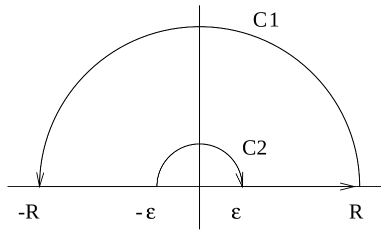
$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{\sin \alpha x}{x} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x \frac{\sin \alpha x}{x}.$$

さらに、この積分は

$$\mathrm{Im}\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x \frac{e^{i\alpha x}}{x}\right]$$

とかける。

そこで、この積分を図のような積分路で計算する。積分路に囲まれた領域内には極は存在しないので、



$$\int_{\mathrm{C}} \frac{e^{i\alpha z}}{z} = 0.$$

$\alpha > 0$ のときは上半面で計算する。

大きな円弧状では $z = Re^{i\theta}$ とかける。この時、この円弧上の積分の寄与は

$$\left|\int_{\mathrm{C}_1} \frac{e^{i\alpha z}}{z}\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^\pi iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta \frac{e^{i\alpha R(\cos\theta + i\sin\theta)}}{Re^{i\theta}}\right| = \left|i\int_0^\pi \mathrm{d}\theta e^{-\alpha R\sin\theta}e^{i\alpha R\cos\theta}\right|$$
$$\leq \int_0^\pi \mathrm{d}\theta e^{-\alpha R\sin\theta}$$

$\sin\theta$ は、$\theta = \frac{\pi}{2}$ で折り返し対称なので、

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta e^{-\alpha R\sin\theta} \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta e^{\frac{-2\alpha R\theta}{\pi}} = \frac{\pi}{\alpha R}(1 - e^{-\alpha R}) \to 0 \quad (R \to \infty)$$

それゆえ、

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \mathrm{d}x \frac{e^{i\alpha x}}{x} + \int_\varepsilon^R \mathrm{d}x \frac{e^{i\alpha x}}{x} + \int_{\mathrm{C}_2} \mathrm{d}z \frac{e^{i\alpha z}}{z} = 0.$$

この最後の項を計算する。C_2 上では $z = \varepsilon e^{i\theta}$ であるから、この上では ε が微小だとすると

$$\int_{\mathrm{C}_2} \frac{e^{i\alpha z}}{z}\mathrm{d}z = \int_\pi^0 \frac{e^{i\alpha\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}}\varepsilon ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$
$$= i\int_\pi^0 \mathrm{d}\theta e^{i\alpha\varepsilon e^{i\theta}} = i\int_\pi^0 \left\{1 + i\alpha\varepsilon e^{i\theta} + O(\varepsilon^2)\right\}\mathrm{d}\theta$$
$$= -i\pi.$$

それゆえ、

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_\varepsilon^R \frac{e^{i\alpha x}}{x}\mathrm{d}x = i\pi.$$

$R \to \infty, \varepsilon \to 0$ として虚部をとると、

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{\sin \alpha x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

を得る。

$\alpha < 0$ の場合、

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{\sin \alpha x}{x} = \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{-\sin|\alpha|\, x}{x} = -\int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{\sin|\alpha|\, x}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

を得る。

(ii) まず、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \mathrm{d}x = \pi\delta_{m,n}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \mathrm{d}x = 0$$

であるから、

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\mathrm{d}x = \pi \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x = -\frac{2}{n^2\pi}\left\{1+(-1)^{n-1}\right\} \\
&= \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2\pi} & \text{if } n = \text{odd} \\ 0 & \text{if } n = \text{even} \end{cases} \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \\
&= 0 \quad \text{since } |x|\sin nx \text{ is odd}
\end{aligned}$$

以上から、

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x.$$

この結果に $x = 0$ を代入すると、$\cos(2n+1)\cdot 0 = 1$ であるから、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

を得る。

2. **(i)** $\lambda = 0$ とおくと、

$$F(0) = \det A = R$$

であるから、$R = \det A$ は明らか。残りの項はすべて λ を含むから、$\det[A-\lambda I]$ の λ を含む項を計算する。

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (a_{11}-\lambda)\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}-\lambda \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= (a_{11}-\lambda)\{(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda) - a_{32}a_{23}\} - a_{12}a_{21}(a_{33}-\lambda) - a_{12}a_{31}(a_{22}-\lambda) + (\lambda\text{を含まない項}) \\
&= -\lambda^3 + (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 \\
&\qquad + (-a_{11}a_{22} - a_{22}a_{33} - a_{11}a_{33} + a_{32}a_{23} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31})\lambda + (\lambda\text{を含まない項})
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}A^2 &= \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&= {a_{11}}^2 + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + {a_{22}}^2 + a_{21}a_{12} + a_{23}a_{32} + a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} + {a_{33}}^2 \\
&= {a_{11}}^2 + {a_{22}}^2 + {a_{33}}^2 + 2(a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{32}a_{23})
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} P &= \mathrm{Tr}A \\ Q &= \frac{1}{2}\left\{\mathrm{Tr}A^2 - (\mathrm{Tr}A)^2\right\} \end{aligned}$$

を得る。

(ii) $P = 0$ のとき、

$$F(\lambda) = -\lambda^3 + Q\lambda + R$$

であるから、

$$F(\lambda) = 0$$

が実数解を 1 つだけ持つ条件を考えればよい。
まず、

$$F'(\lambda) = -3\lambda^2 + Q$$

であるから、
$Q \leq 0$ のとき、任意の R に対して $F(\lambda)$ は極値を持たず、単調である。それゆえ実数解を一つだけ持つ。
$Q > 0$ のとき、$F(\lambda)$ は $\lambda = \pm\sqrt{\frac{Q}{3}}$ で極値を持つ。λ^3 の係数は負なので $\lambda = -\sqrt{\frac{Q}{3}}$ で極小、$\lambda = \sqrt{\frac{Q}{3}}$ で極大値をとる。実数解を持つためには極値が同符号ならよいから、

$$F(\lambda) = -\lambda^3 + Q\lambda + R = \frac{1}{3}(-3\lambda^2 + Q)\lambda + \frac{2}{3}Q\lambda + R$$

に注意して、

$$F\left(-\sqrt{\frac{Q}{3}}\right)F\left(\sqrt{\frac{Q}{3}}\right) = R^2 - \frac{4}{27}Q^3 > 0$$

ならよい。これと上の $Q \leq 0$ を合わせて、求める条件は

$$R^2 - \frac{4}{27}Q^3 > 0$$

である。

3. **(i)** 明らかに $H_0(x) = 1$ であるから、

$$\begin{aligned} H_1(x) &= x + C_1 \\ H_2(x) &= x^2 + C_2 x + C_2{}' \\ H_3(x) &= x^3 + C_3 x^2 + C_3{}' x + C_3{}'' \end{aligned}$$

とおいて、直交性から未定係数を定める。ここで、$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2} x^{2n+1} = 0$ 　(ただし、$n = 0, 1, 2 \cdots$) であることに注意する。
$H_1(x)$ について。

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2} H_0(x) H_1(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2} (x + C_1) \\ &= \sqrt{\pi} C_1 \end{aligned}$$

これより、$C_1 = 0$. つまり、$H_1(x) = x$.

次に $H_2(x)$ について。$H_0(x)$ との内積から、

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2}(x^2 + C_2 x + C_2{}') \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sqrt{\pi} C_2{}'
\end{aligned}
$$

これより、$C_2{}' = -\dfrac{1}{2}$. $H_1(x)$ との内積から、

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2} x(x^2 + C_2 x + C_2{}') \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} C_2
\end{aligned}
$$

それゆえ、$C_2 = 0$. よって、$H_2(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}$
次に $H_3(x)$ について。$H_0(x)$ との内積をとると、

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2}(x^3 + C_3 x^2 + C_3{}' x + C_3{}'') \\
&= C_3 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x^2 e^{-x^2} + C_3{}'' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2} \\
&= \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2} C_3 + C_3{}''\right)
\end{aligned}
$$

それゆえ、$C_3 = -2C_3{}''$.
$H_1(x)$ との内積から、

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2} x(x^3 + C_3 x^2 + C_3{}' x + C_3{}'') \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x^4 e^{-x^2} + C_3{}' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x^2 e^{-x^2} \\
&= \sqrt{\pi}\left(\frac{3}{4} + \frac{C_3{}'}{2}\right)
\end{aligned}
$$

それゆえ、$C_3{}' = -\dfrac{3}{2}$.
$H_2(x)$ との内積から、

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\left(x^3 + C_3 x^2 + C_3{}' x + C_3{}''\right) \\
&= C_3 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x^4 e^{-x^2} + C_3{}'' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x^2 e^{-x^2} - \frac{C_3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x^2 e^{-x^2} - \frac{C_3{}''}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2} \\
&= \sqrt{\pi}\left(\frac{3}{4} C_3 + \frac{C_3{}''}{2} - \frac{C_3}{4} - \frac{C_3{}''}{2}\right)
\end{aligned}
$$

これより、$C_3 = 0, C_3{}'' = 0$.
以上をまとめて、

$$
\begin{aligned}
H_1(x) &= x \\
H_2(x) &= x^2 - \frac{1}{2} \\
H_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2} x
\end{aligned}
$$

(ii) 帰納法を用いる。

$$
H_n(-x) - (-1)^n H_n(x) = 0 \qquad \cdots (1)
$$

$n = 0$ のとき、$H_0(-x) - (-1)^0 H_0(x) = 1 - 1 = 0$ であるから、(1) は成り立っている。
次に $n = k - 1$ まで成り立っているとして、$n = k$ のときを考える。ところで、

$$
H_n(x) = x^n + C_n x^{n-1} + \cdots
$$

であるから、未定係数は n 個ある。一方、$m = n-1, \cdots, 0$ に対しての直交条件から独立な条件は n 個ある。つまり、$H_n(x)$ は一意的に決まる。

さて、$0 \le m < n$ のとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)$$

において $x \to -x$ とおきかえると、$m < n$ に対しては (1) は成り立つので

$$0 = \int_{\infty}^{-\infty} \mathrm{d}(-x) e^{-x^2} H_n(-x) H_m(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2} (-1)^m H_n(-x) H_m(x)$$

となり、$H_n(-x)$ は $H_n(x)$ と同じ直交条件を満たす。すなわち、$H_n(-x)$ は $H_n(x)$ に定数倍を除いて一致する。ここで、そもそも

$$H_n(x) = x^n + (n-1 \text{ 次以下の多項式})$$

であったから、

$$H_n(-x) = (-1)^n x^n + (n-1 \text{ 次以下の多項式})$$

である。それゆえ、

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

が成り立つ。つまり、$n = k$ に対しても (1) が成り立つ。

以上から、数学的帰納法により、すべての $n = 0, 1, \cdots$ に対して

$$H_n(-x) - (-1)^n H_n(x) = 0$$

が成り立つ。

(iii) 再び数学的帰納法を用いる。

$n = 1$ のとき、

$$xH_1(x) = x^2 = H_2(x) + a_n H_0(x) = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

となり、$a_n = \dfrac{1}{2}$ とおけば

$$xH_n(x) = H_{n+1}(x) + a_n H_{n-1}(x) \qquad \cdots (2)$$

が成り立つ。

次に $n = k-1$ まで成り立っていると仮定すると、

$$xH_{k-1}(x) = H_k(x) + a_{k-1} H_{k-2}(x).$$

$n = k$ のとき、

$$xH_k(x) - H_{k+1}(x) = \sum_{l=0}^{k} c_l H_l(x)$$

とかける。ここでもしも $c_k \neq 0$ とすると右辺の最高次の項は x^k である。このとき、左辺は $x \to -x$ に対して $(-1)^{k+1}$ がかかるが、右辺の最高次の項には $(-1)^k$ がかかる。これは矛盾する。そのため、$c_k = 0$ でなくてはならない。

$m(<k)$ に対して、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2}(xH_k(x) - H_{k+1}(x))H_m(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2} H_k(x) x H_m(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2} H_k(x)(H_{m+1}(x) + a_m H_{m-1}(x)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2} H_k(x) H_{m+1}(x)\end{aligned}$$

となる。これは $m+1=k$ のときのみ 0 でない。つまり、

$$xH_k(x) - H_{k+1}(x) = c_{k-1}H_{k-1}(x)$$

とかける。
そこで、

$$a_k = c_{k-1}$$

とおけば (2) が成り立つ。
以上から、数学的帰納法から、すべての $n = 0, 1, \cdots$ に対して (1) が成り立つ。
次に

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_n(x) = nH_{n-1}(x)$$

について考える。
再び数学的帰納法を用いる。$n=1$ に対しては

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_1(x) = 1 = 1 \cdot H_0(x)$$

となり明らかに成り立つ。
次に $n = k-1$ にたいして

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_n(x) = nH_{n-1}(x) \qquad \cdots (3)$$

が成り立っているとする。
すると、$n=k$ に対して

$$H_n(x) = x^n + (n-1\ \text{次以下の多項式})$$

であるから、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_n(x) = nx^{n-1} + (n-2\ \text{次以下の多項式}) \qquad \cdots (4)$$

となる。このため、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_n(x) = nH_{n-1}(x) + \sum_{l=0}^{n-2} c_l H_l(x)$$

とかける。
上と同様に $m<n$ に対して $H_m(x)$ との内積を考える。

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_n(x)\right) H_m(x) \\ &= \left[H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x H_n(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-x^2} H_m(x)\right) \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left\{H_n(x)(-2x)e^{-x^2}H_m(x) + H_n(x)e^{-x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_m(x)\right\} \\ &= 2\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2} H_n(x) x H_m(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2} m H_n(x) H_{m-1}(x) \\ &= 2\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2} H_n(x)(H_{m+1}(x) + a_n H_{m-1}(x)) \\ &= 2\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2} H_n(x) H_{m+1}(x)\end{aligned}$$

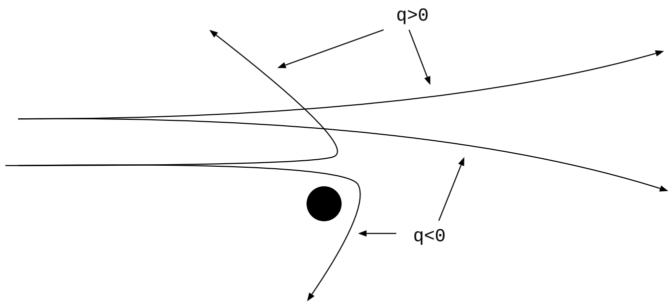
これは $m+1=n$ のときのみ 0 でない。すなわち、上で、$l=0,1,\cdots,n-2$ に対して $c_l=0$.
また、(4) より、$c_{n-1}=n$ である。ゆえに

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_n(x)=nH_{n-1}(x)$$

を得る。これにより、$n=k$ のときも (3) が成り立つ。以上から数学的帰納法により、(3) が成り立つ。

■ 教育 物理 解答

1. **(i)** 力は $\frac{kZeq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ ($\vec{r}$ は原子核から荷電粒子の方向) で、r^2 が小さいほど力は強いことに注意すると、



(ii) $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ なので、$\vec{L}=m\vec{r}\times\vec{v}=m\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$。
ちなみに、$\vec{r}$ と $\vec{v}$ の関係を求めておくと、荷電粒子の全エネルギーは、$\frac{1}{2}mv^2+k\frac{Zeq}{r}$ なので、エネルギーの保存より、

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+k\frac{Zeq}{r}$$
$$v^2=v_0^2-\frac{Z2eqk}{mr} \qquad \cdots (1)$$

(iii) $\vec{L}$ を時間微分すると、

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\vec{r}\times\dot{\vec{r}})=m(\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}+\vec{r}\times\ddot{\vec{r}})=m(\vec{r}\times\ddot{\vec{r}})$$

運動方程式 $m\ddot{\vec{r}}=\frac{kZeq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ を使うと、これは 0 になる。よって示された。

(iv) $|\vec{L}|$ を求める。保存するので、無限遠で求めればよい。

$$|\vec{L}|=m|\vec{r}\times\dot{\vec{r}}|=m|\vec{r}\times\vec{v_0}|=mbv_0.$$

(v) 一番近づいた時、$\vec{v}\perp\vec{r}$。よって、$|\vec{L}|=msv_s=mv_0$ より、$v_s=v_0\frac{b}{s}$。

(vi) (1) より、$v_s^2=v_0^2-\frac{2Ze^2k}{ms}$ よって、

$$\frac{v_0^2b^2}{s^2}=v_0^2-\frac{2Ze^2k}{ms}$$
$$s^2-\frac{2Ze^2k}{mv_0^2}s-b^2=0$$
$$s=\frac{Ze^2k}{mv_0^2}\pm\sqrt{\frac{Z^2e^4k^2}{m^2v_0^4}+b^2}.$$

$s>0$ なので、+の方が答。

2. **(i)** 電荷分布が球対称なので、電場も球対称。

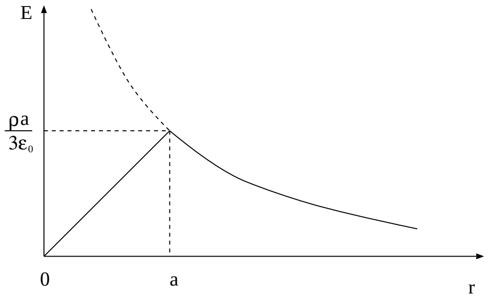
•$r>a$ のとき。Gauss の法則より、

$$\int E(r)dS=4\pi r^2E(r)=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4\pi}{3}a^3\rho$$
$$E(r)=\frac{a^3\rho}{3\varepsilon_0r^2}.$$

•$r<a$ のとき。内部電荷は $\frac{4\pi}{3}r^3\rho$ より、

$$\int E(r)dS=4\pi r^2E(r)=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4\pi r^3}{3}\rho$$
$$E(r)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r.$$

よって、グラフにすると、



(ii) $\vec{E} = -\nabla\phi$ より、$\phi = -\int \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int E(r)dr$ なので、

$r > a$ では、

$$\phi(r) = -\int \frac{a^3\rho}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr = \frac{a^3\rho}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} + A.$$

$r \to \infty$ で、$\phi \to 0$ より、$A = 0$。よって、$\phi(r) = \frac{a^3\rho}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r}$.

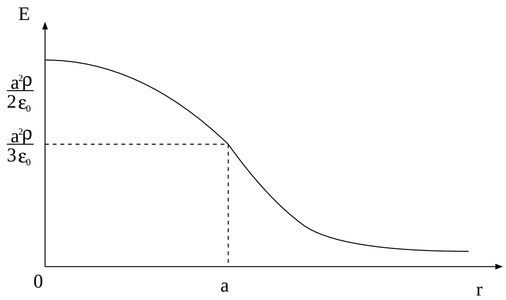
$r < a$ では、

$$\phi(r) = -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0}rdr = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 + B.$$

$r = a$ で連続より、

$$-\frac{\rho a^2}{6\varepsilon_0} + B = \frac{a^2\rho}{3\varepsilon_0}$$
$$B = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}.$$

結局、$\phi(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 + \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$.



(iii) 微小な電荷を無限遠から何回か運んできた後、半径 a の電荷球の電荷密度が ρ' になっているとする。ここで、さらに微小な電荷 Δq を運んでくると、電荷球の電荷密度が $\Delta\rho = \frac{3}{4\pi a^3}\Delta q$ だけ増える。$r \sim r + dr$ の微小体積の電荷密度を $\Delta\rho$ だけ増すのに必要な仕事は、

$$\left(-\frac{\rho'}{6\varepsilon_0}r^2 + \frac{a^2\rho'}{2\varepsilon_0}\right)4\pi r^2\Delta\rho dr.$$

よって、全球の電荷密度を $\Delta\rho$ だけ増すのに必要な仕事 ΔW は

$$\Delta W = \int_0^a \left(-\frac{\rho'}{6\varepsilon_0}r^2 + \frac{a^2\rho'}{2\varepsilon_0}\right)4\pi r^2\Delta\rho dr = \frac{2\pi}{\varepsilon_0}\Delta\rho\rho'\frac{4}{15}a^5.$$

したがって、電荷密度を ρ にするまでに必要な仕事 W_1 は、

$$W_1 = \int \Delta W = \int_0^\rho \frac{2\pi}{\varepsilon_0}\rho'\frac{4}{15}a^2 d\rho' = \frac{4\pi a^5}{15\varepsilon_0}\rho^2.$$

(iv) 単位体積あたりの静電場のエネルギー u は、$u=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$。よって、球内では、

$$u_{in}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{\varepsilon_0}{2}\cdot\frac{\rho^2}{9\varepsilon_0^2}r^2=\frac{\rho^2}{18\varepsilon_0}r^2.$$

したがって、全部で、

$$U_{in}=\int\frac{\rho^2}{18\varepsilon_0}r^2d^3r=4\pi\frac{\rho^2}{18\varepsilon_0}\int_0^a r^4d^3r=\frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0}\frac{a^5}{5}.$$

球外では、

$$u_{out}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{\varepsilon_0}{2}\cdot\frac{a^6\rho^2}{9\varepsilon_0^2 r^4}=\frac{\rho^2}{18\varepsilon_0}\frac{a^6}{r^4}.$$

全部で、

$$U_{out}=\int\frac{\rho^2}{18\varepsilon_0}\frac{a^6}{r^4}d^3r=4\pi\frac{\rho^2}{18\varepsilon_0}a^6\int_a^\infty\frac{1}{r^2}d^3r=\frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0}a^5.$$

以上より、全空間の静電場のエネルギーは、

$$W_2=\frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0}a^5\left(\frac{1}{5}+1\right)=\frac{4\pi\rho^2}{15\varepsilon_0}a^5.$$

3. **(i)** 理想気体の状態方程式は $PV=nRT$ で、気体の重さ m は $m=nM$ より、$n=m/M$ で、$PV=mRT/M$。$\rho=m/V$ より、

$$P=\frac{\rho RT}{M}. \qquad \cdots (2)$$

(ii)

$$\frac{P}{\rho^\gamma}=C \qquad \cdots (3)$$

より、$P=C\rho^\gamma$ である。よって、

$$k=\frac{dP}{d\rho}=C\gamma\rho^{\gamma-1}. \qquad \cdots (4)$$

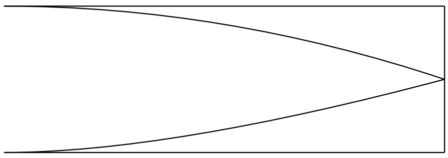
C を求める。(3) に (2) を代入すると、

$$\frac{RT}{M}\frac{1}{\rho^{\gamma-1}}=C$$
$$C\rho^{\gamma-1}=\frac{RT}{M}.$$

これを (4) に代入して、$k=RT\gamma/M$

(iii) 音速を v とすると、$\Delta\rho=f(x-vt)$ とおけて、$kf''=v^2f''$。よって、$v=\pm\sqrt{k}$。従って、ヘリウムガスの音速は $\sqrt{\frac{RT}{4}\frac{5}{3}}$、窒素ガスの音速は $\sqrt{\frac{RT}{28}\frac{7}{5}}$ なので、ヘリウムガスの音速は、窒素ガスの音速の $\sqrt{\frac{5RT}{4\cdot 3}}\cdot\sqrt{\frac{28\cdot 5}{7RT}}\simeq 2.9$ 倍。

(iv) 閉じた方は固定端で開いた方は自由端である。波長は図から $\lambda_0/4 = l$ で、$\lambda\nu_0 = v$。よって、$\nu_0 = v/\lambda_0 = v/4l$。したがって、ヘリウムガスのほうが窒素ガスより振動数が大きくなる。



(v) 普通に、速さの速い方から遅い方への入射となる。角度は屈折の法則より、$\frac{\sin\theta}{\sin\phi} = \frac{v_N}{v_{He}}$ となる。