1999 年度　入学試験 一般教育科目

■ 教育 英語

1. 次の英文を読み以下の設問に答えよ。

I propose to analyze “Talking about Science.” How is it best done? Why is it that a subject presented by A is thrilling account which leaves a deep impression, whereas the very same material presented by B is dull and boring and produces no impression whatever? How should we present our branch of science to fellow scientists who work in quite another field? How can we present science to those who have little or no scientific background, as if often the case with men of high ability who are important in affairs of state? How can we make the non-scientist understand why its study means so much to us, a passion they sometimes find very difficult to understand?

What is a basic character of a (ア)“talk”? I think it can be expressed by saying that its primary object is to create a state of mind, or point of view, not to convey information. I can perhaps illustrate what I mean by dwelling on the vast difference between the spoken and written account. Under the heading “talk,” I am not including a course of lectures where students take notes and the lectures follow each other as a composite whole. Nor do I include the “get together” of two or three experts in the same line of research, for which no rules are necessary. I am considering the hour’s talk to an audience whose interest one has to arouse. The written account can also aim at creating a viewpoint, but its main function is to be a storehouse of information. The argument can be meaty and condensed. It can be packed with tables, graphs, and mathematical equations. This is possible because the reader can always pause and digest it at his leisure, going back over parts which he finds to be difficult. I do not mean to imply that one can be irresponsible in a talk, but one need not cross all the “t’s” and dot all the “i’s.” In fact, the talk would be spoiled by attempt to do so.

A talk is therefore different altogether from a (イ)“paper.” To my mind the governing factor which determines its art form is this: The success of the way in which the subject has been presented is measured by the extent to which the average number of the audience remembers it next day.

This may seem an obvious statement, but if we use this principle as a yardstick to assess a lecture we have listened to, or in planning to a lecture of our own, it creates a very significant viewpoint. The value of a lecture is not to be measured by how much one manages to cram into an hour, how much important information has been referred to, or how completely it covers the ground. It is to be measured by how much a listener can tell a friend about it next morning. If we honestly put this question to ourselves and think how little we can remember of talks we have heard, it gives us a sense of proportion and of values in planning a lecture and makes us realize that what we say will go over the heads of audience if we set our sights too high. I would like now to list what I believe to be some of the considerations which apply in planning a talk.

For instance, suppose we ask how many points can we hope to “get over” in an hour? I think the answer should be “one.” If the average member of the audience can remember with interest and enthusiasm one main theme, the lecture has been a great success. I like to compare the composition of a lecture to that of a picture. Of course this is dangerous ground on which to venture, because art experts differ so much among themselves. But in simple terms, is it not held that a picture should have one main center of interest? It may have numerous subsidiary features, but the composition is so cunningly arranged that when the eye falls on these and follows their placing it is subtly led back to the main center of interest and does not fail out of picture frame. A lecture should be like that. There should be one main theme, and all the subsidiary interesting points, experiments, or demonstrations should be such that they remind hearer of the theme. As in a picture, so in a lecture, the force of the impression depends upon a ruthless sacrifice of unnecessary detail. It can be richly endowed with exciting details, but they must be of such a kind that recollection of them inevitably brings the main theme back to mind. In other words, the lecture must compose in the sense of having a pattern because it is this pattern which helps so much to impress it on one’s memory.

A lecture is made or marred in the first 10 minutes. This is the time to establish the foundations, to remind the audience of things they half know already, and to define terms that will be used. Again this seems obvious, but I have listened to so much splendid material lost to the audience because the lecturer failed to realize that it did not know what he was talking about, whereas, if the precious first 10 minutes had been spent on preparation, he would have carried his listeners with him for the rest of the talk.

Here a most important principle comes in which I think of as the “detective story” principle. It is a matter of order. How dull a detective story would be if the writer told you who did it in the first chapter and then gave you the clues. Yet how many lectures do exactly this. One wishes to give the audience the esthetic pleasure of seeing how puzzling phenomena become crystal clear when one has the clue and thinks about them in the right way. So make sure the audience is first puzzled.

We all know the tendency to go to sleep in lectures; how often have I felt ashamed at doing so myself. Though the best lecturer can never entirely escape from producing this effect, there is much that can be done to minimize it. A continuous even delivery is fatal. There is something hypnotic about it which induces sleep. Pauses and changes of tempo are essential. Above all, jokes have a marked and enduring effect.

The Art of Talking about Science, Lawrence Bragg; Science **154**(1966)1614 より抜粋

(i) 筆者は、下線部 (ア) の talk と下線部 (イ) の paper との本質的な相違は何だといっているのか、また、successful talk とはどのようなものだと言っているのか、簡潔に日本語で説明せよ。

(ii) 筆者が、successful talk をする上で、speaker が配慮すべきものとしてあげている事柄を 4 つ、日本語で箇条書きにして述べよ。

(iii) 枠で囲った二つのパラグラフに共通したひとつの副題を付けたい。以下の 5 つの副題から最も適したものを一つだけ選べ。

(ア) A Detective Story

(イ) The Arousing of Interest

(ウ) Tempo and Jokes

(エ) Giving Clues

(オ) The Best Lecturer

2. 以下の文章を英訳せよ。ただし、必要であれば以下の単語を参考にせよ。

differential operator, simultaneity, transmitting medium, Galilean transformation

(i) Schrödinger 方程式と古典的なエネルギー運動量の方程式を比べてみると、少なくとも自由粒子に対しては、エネルギーと運動量が波動関数 ψ に作用する、以下の微分作用素に対応するものと考えられる。

$$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad p \rightarrow -i\hbar\nabla$$

(ii) Michelson と Morley の有名な実験は、光速が、観測者、媒質、光源の間の相対運動に無関係にすべての方向に対して同じであることを示した。

(iii) したがって、古典力学を不変に保つガリレイ変換は正しくなく、光速を一定とするような別の変換に置き換えられねばならない。

(iv) Einstein は、このような変換が必然的に、従来の時間と同時性の概念を変更してしまうことを明らかにした。

■ 教育 数学

1. 2 次元空間におけるベクトル場 $\boldsymbol{E}(x, y)$ の各成分 $E_x(x, y),\ E_y(x, y)$ は、必要な階数まで微分可能であるとして、以下の設問に答えよ。

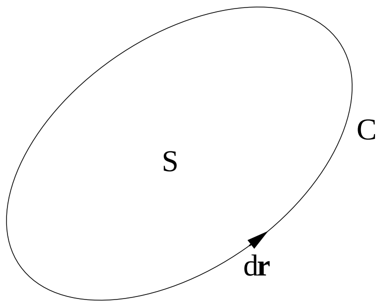
(i) $\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = 0$ のとき、あるスカラー場 $\varphi(x, y)$ が存在して、

$\boldsymbol{E} = \mathrm{grad}\,\varphi = \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$　と表せることを示せ。

但し、次の関係を用いて良い。

$$\iint_S \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_C (E_x \mathrm{d}x + E_y \mathrm{d}y)$$

ここで S は閉じた道 C で囲まれる領域の内部であり、線積分の向きは反時計回りである。



(ii) $\boldsymbol{E} = (x^2 - y^2, -2xy)$ のとき $\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = 0$ となることを示し、設問 (i) における $\varphi(x, y)$ を求めよ。

(iii) 点 (x, y) における接線が、設問 (ii) の $\boldsymbol{E}(x, y)$ と平行になる曲線群 $\Psi(x, y) = a$　(a = 定数) を決定せよ。

2. **(i)** 行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを全て求めよ。ただし、固有ベクトルは正規化せよ。

(ii) 次の行列

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

により、設問 (i) の行列 $\mathbf{A}$ を変換して得られる行列 $\mathbf{B} = \mathbf{XAX}^\dagger$ を考える。ただし、$\mathbf{X}^\dagger$ は $\mathbf{X}$ のエルミート共役行列である。行列 $\mathbf{B}$ の固有値、固有ベクトルを示せ。ただし、固有ベクトルは正規化せよ。

(iii) エルミート行列 $\mathbf{A} = (a_{ij})$　$(i, j = 1, \ldots, n)$ の固有値を α_i　$(i = 1, \ldots, n)$ とする。それらに関して次の 2 つの量、

$$F = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \quad , \quad G = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$$

を考える。設問 (i) の $\mathbf{A}$ に対して F と G を求めよ。

(iv) 設問 (iii) の F と G の関係を、一般のエルミート行列 $\mathbf{A}$ に対して述べよ。

3. 時刻 $t = 0$ において $x = 0$ に強さ 1 の熱を加えたときの、1 次元空間におけるその後の熱の伝導は、方程式、

$$\left(\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right) G(x,t) = -\delta(x)\delta(t) \qquad (\kappa \text{ は正定数}) \qquad \cdots (1)$$

の解 $G(x,t)$ によって記述される。ただし、$\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。また $t = -\infty$ で $G(x,t) = 0$ とする。

(i) $G(x,t)$ のフーリエ変換 $g(k,\omega)$ を次の式で定義する:

$$G(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(k,\omega) e^{i(kx-\omega t)} \mathrm{d}k\mathrm{d}\omega \qquad \cdots (2)$$

このとき $g(k,\omega)$ の満たすべき方程式を式 (1) より導き、$g(k,\omega)$ を求めよ。

(ii) 設問 (i) で求めた $g(k,\omega)$ を式 (2) に代入し、ω 積分を実行せよ。

(iii) 設問 (ii) に続いて k 積分を実行し、$G(x,t)$ を求めよ。ただし、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} \mathrm{d}\alpha = \sqrt{\pi} \qquad \cdots (3)$$

を用いてよい。

■ 教育 物理

1. ロケットを垂直上方に打ち上げて、地球の重力圏を脱したい。時刻 t におけるロケットの高さ、速度および質量をそれぞれ $h(t)$, $v(t) = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$, $M(t)$、ロケットから噴射されるガスの、ロケットに対する相対速度を u とする。重力加速度を $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$、地球の半径を $R = 6370\ \mathrm{km}$ として、以下に答えよ。なお、相対速度 u は一定であるとし、空気抵抗は無視せよ。

(i) 地球の重力圏を脱出するためには噴射が終わったときの速度がある値（脱出速度：v_{esc}）を越えている必要がある。噴射終了時の高度は R に比べて十分小さいとして v_{esc} を求めよ。

(ii) ロケットの運動方程式は、

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -u\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} - Mg$$

で与えられる。この式を導け。

(iii) 燃料の噴射時間を Δt とし、噴射開始時および噴射終了時の全質量をそれぞれ、$M_i = M(t_0)$, $M_f = M(t_0+\Delta t)$ とおくとき、この間の速度変化 $\Delta v = v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)$ を求めよ。また、噴射時間内の速度変化 Δv を増やすにはどうしたらよいかを述べよ。

(iv) 簡単のため、ロケットの加速度は一定であるとし、$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ng$ とおく。ここに、加速度係数 n は、乗組員や機内の装置に支障が生じないように選ばれた定数である。噴射開始時の質量 M_i と噴射終了時の質量 M_f の差がすべて燃料であるとして、燃料噴射時間 Δt、噴射による速度変化 Δv、および高度変化 Δh を求めよ。

(v) 燃料の燃焼温度を T K とするとき、燃料ガスの噴射速度 u は、燃料の分子がこの温度の下で持つ平均の運動エネルギーから決まる平均速度を超えられない。燃料分子の質量を m、ボルツマン定数を k として、燃料分子の平均速度 u_0 をあらわせ。また、$u = u_0$ が実現できたとして、燃料ガスの噴射速度を大きくするには、どうしたらよいかを述べ、最良の燃料として何を選んだらよいかを言え。

(vi) 燃焼温度を $T = 2000$ K、$k = 1.4\times10^{-23}$ J/K、陽子の質量 m_p を 1.7×10^{-27} kg で与えられるとき、設問 (v) で選んだ燃料から期待される最高噴射速度を求めよ。

(vii) 実際のロケットでは、構造上、噴射開始時および噴射終了時の全質量の比 $\frac{M_i}{M_f}$ は、高々4 程度にしかできない。燃料ガスの噴射速度を $u = 3$ km/s、加速度係数を $n = 4$ として、期待される最終速度を求め、脱出速度と比較せよ。この結果と設問 (v) と (vi) の結果から、脱出速度を得るためにどういう工夫をしたらよいかを論ぜよ。ただし、$\ln 2 = \log_e 2 = 0.7$ とおけ。

2. 半径 a の円形断面を持つ無限に長い直線導線がある。電流が流れていないとき、導線内の電荷分布は一様で、正電荷密度は $\rho_+ = \rho_0$、伝導電子による負電荷密度は $-\rho_- = -\rho_0$ であるが、電流を流すと、負電荷密度 $-\rho_-$ には $-\rho_0$ からのずれが生じる。これに関連した次の各設問に答えよ。
導線の内外で誘電率および透磁率は、それぞれ真空での値 ε_0, μ_0 を用いてよい。

(i) 外部電場が加わると電子は平均の移動速度（ドリフト速度）で流れる。この結果生ずる一様で定常な電流密度 j を電子の電荷密度 $-\rho_-$ と電子のドリフト速度 $v(> 0)$ で表せ。

(ii) この電流が導線の内外に作る磁場（磁束密度 B）を、導線の中心からの距離 r の関数として求め、その向きを図示せよ。

(iii) この磁場が導線内の一個の伝導電子に作用するローレンツ力の大きさを、電子のドリフト速度 v と磁場の大きさで表し、その向きを図示せよ。

(iv) 伝導電子は、設問 (iii) で求めた磁場からのローレンツ力を受けているにもかかわらず定常的に運動している。それは磁場のローレンツ力をうち消す電場が作られているからである。この電場を求め、その向きを図示せよ。

(v) これまでの結果をもとに、電流が流れると電荷分布がどう変化するかを簡潔に説明せよ。

(vi) 実際に変化した電荷分布を求めよ。ただし、正電荷密度を ρ_+、負電荷密度を $-\rho_-$ とおき、各電荷密度を ρ_0 と v で表し、電流が流れていない場合からの変化を求めよ。

(vii) 断面積 1 mm^2 の導線に 1 A の電流が流れるときの電子のドリフト速度を計算し、上で求めた電荷密度の変化の割合を評価せよ。ただし、銅の質量密度は 9×10^3 kg·m^{-3}、原子量は 63.55 であり、原子 1 個あたり自由電子が 1 個あるとする。また、素電荷は 1.6×10^{-19} C、アヴォガドロ定数は 6×10^{23} mol^{-1}、真空の光速度は 3×10^8 m/s とする。

3. **(i)** 図 1 に示すような実験器具で、単色光を使ったヤングの干渉実験を行った。光を単スリット A に通した後、複スリット B、C を通過させると、複スリットから回折した光が干渉し、その結果、スクリーン上に明暗の干渉縞ができた。複スリット B と C の間隔は、$d = 30\ \mu$m、複スリットとスクリーンとの間の距離は $a = 5$ cm であった。光は赤色で、波長は $\lambda = 0.6\ \mu$m である。この時、スクリーン上で観察される干渉縞の間隔（明線と明線の間隔）s を求めよ。
B、C の各々のスリットの幅は十分狭いとしてよい。

(ii) 次に、図 2 に示すような配置に変えた（垂直上方から見た図）。つまり、図 1 のスクリーンの位置にレンズを置き、スクリーンをその後方に移動させ、複スリットの拡大像をスクリーンに写し出した。使用したレンズは、直径 $L = 2$ cm で焦点距離 $f = 4.5$ cm のものである。この時、ピントのあった像を得るには、レンズとスクリーンの間の距離 b を何 cm にすればよいか。また、スクリーン上に輝線として写し出された複スリットの像の間隔 D は何 mm か。

(iii) 図 2 の配置のまま、複スリットを、B と C の間隔 $d = 2\ \mu$m のものに交換した。すると、スクリーン上に写し出された複スリットの像が 2 本の輝線ではなく、1 本の輝線として観察された。ルーペでスクリーン上の像を拡大してみても、輝線は 1 本のままであった。なぜ、複スリットの間隔が狭い場合には 2 本の輝線に分離して観察されないのか、理由を説明せよ。

(iv) スクリーン上で 2 本の輝線として観察される複スリットの最小間隔 d_0 を求めよ。

(v) 設問 (iii) の観察で、d_0 が狭い場合でも複スリットの像が 2 本に分離された輝線としてスクリーン上に写し出されるようにしたい。光源の波長を変えない場合、どのような工夫をすればよいか。また波長を変えてよい場合は、どのようにすればよいか。各々理由を付けて答えよ。

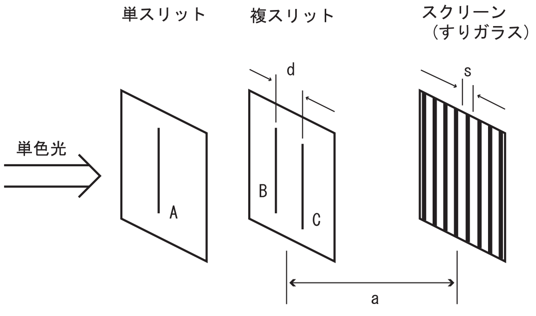


図 1

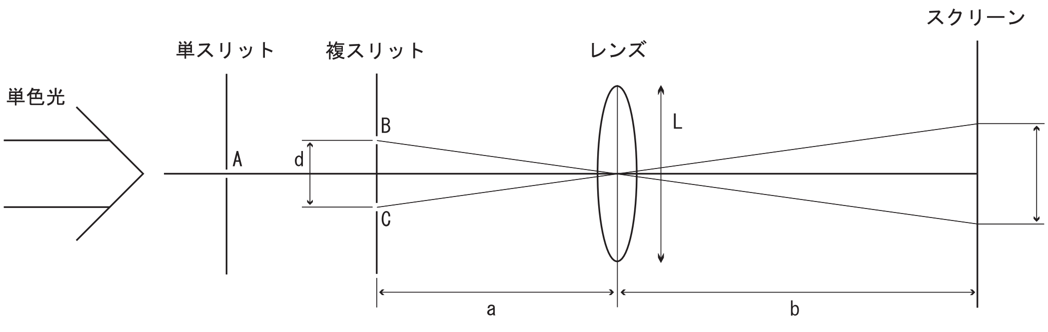


図 2

■ 教育 英語 解答

1. **全訳**

“Talking about Science” について分析してみよう。どうやったら一番うまくできるのだろうか。Ａによって発表された題材は深い印象を残すスリリングなものであるのに対し、同じものがＢによって発表されると退屈で全く印象を残さないのはなぜだろうか。全く別の分野の科学者に自分の分野のことについて発表するにはどうしたらよいのだろうか。政治家によくいるような、科学の知識がほとんど、あるいは全くない人々に科学について話すにはどうしたらできるだろうか。科学者以外の人達にその研究が重要な意味を持っている理由、すなわち彼らにとっては時に非常に理解しがたいものである情熱をどのようにしたらわかってもらえるだろうか。

“Talk” の基本的な特徴は何であろうか。それは “Talk” の第一の目的は情報を伝えることではなく、心の状態すなわち考え方を築くことである、と言い表されると思う。私の言いたい事はおそらく言葉による説明と活字による説明との大きな違いをよく考えてみることで説明できるだろう。見出しの “Talk” には、学生がノートを取ったり一つ一つの講義がお互いにフォローしてできあがるような講座は含まれない。また、同じ研究分野の 2、3 人の専門家の、何ら規則も必要としないような集まりも含まない。私が言っているのは限られた時間内で聴衆の興味を引き起こさなければならない話のことである。活字による説明も物の見方を築くこともできるが、その主な目的は情報の蓄積である。その議論は内容が豊かで濃い。表やグラフ、数式を含みうる。これは読者がいつも都合の良い時に小休止してまとめ、難しいと思った部分に立ち戻ることができるからこそ可能なのである。Talk の際に無責任であって良いといっているのではなく、細かいところにまで気を使う必要はないといっているのである。実際、そんなことをしようとしたら Talk は台無しになってしまうだろう。

それゆえ Talk は「論文」とは全く異なるものである。私の考えではその技術の形式を決定する主な要因は次のようなものである。「題材を発表した方法の成果は次の日にそれを覚えている聴衆の平均数の程度で測られる。」

これは当たり前の意見のように思えるかもしれないが、もし自分が聞いた講義を評価する基準としてこの原理を使ったり、あるいは自分自身の講義の計画を立てる際に使えばとても重要な観点が生み出されるのである。講義の価値は 1 時間にどれだけの量を詰め込むのかにでも、どれだけ多くの重要な情報に触れたかにでも、基礎をどれだけしっかり押さえたかにでも測られるのではない。翌朝にどれだけの聞き手が友達にそれについて話せるかで測られるのである。もし我々科学者がこの問題を正直に受け止め、自分が聞いた講義をどれほど思い出すことができないのかということを考えれば、我々は講義の計画を立てる際に判断力と価値観が備わるし、目標を高くしすぎると我々の言っていることが聴衆の理解を超えてしまうことに気付く。ここで、Talk を準備する際に利用する配慮であると私が思うもののうちいくつかを挙げたいと思う。

例えば、１時間にどれだけのポイントを理解させることができるか尋ねてみよう。答えは「一つ」だと私は思う。もし聴衆の中の平均的な人が強い興味を持って一つのメインテーマを覚えているなら、その講義は大成功である。講義と写真の構成を比べてみよう。もちろんこれはやるには危険な試みである。なぜなら芸術家には非常に多種多様な人たちがいるからである。しかし、簡単に言ってしまうと絵画には興味の核となるものが一つあるとは考えられないだろうか。絵画には多くの副次的な特徴があるが、その構成は非常に巧妙に仕組まれているので、その特徴に目をやり、配置を追っていくとうまく興味の核に引き戻され絵の枠からはみ出ないのである。講義もそのようであるべきである。一つのメインテーマがあり、副次的な興味、実験、実証というのはすべて聞き手にテーマを思い出させるようなものであるべきなのである。絵画のように講義でも、印象に残るかどうかは不必要な細かい点をバッサリと切り落とせるかどうかにかかっているのである。講義にはもともと刺激的な細部が豊富にあるかもしれないが、その細部はそれらを思い出していくと必然的にメインテーマを思い起こしてしまうようなものでなくてはならない。言い換えれば講義はあるパターンを持つという意味で構成されていなければならない。なぜならこのパターンで人の記憶に印象を残すことができるからである。

講義は最初の１０分で成否が決まってしまう。これは話の土台を作り、聴衆に彼らがすでに半分知っていることを思い出させ、使われる用語を定義するための時間である。やはりこれも明らかなことに思えるが、素晴らしい題材であっても講演者が自分の話を聴衆はわかっていない事を理解できていないために、聴衆が取り残

されてしまっているものを私は聞いたことがある。が、もし貴重な最初の１０分を下準備に充てていたなら残りの話にも聞き手はついていくことができただろう。

ここで私が「推理小説」の原理と思っているとても重要なものを教えよう。問題なのは順番である。もし作者が最初の章に誰がやったかを教え、手がかりを与えてしまったら推理小説はつまらない物になってしまうだろう。しかしこれと同じ事をやっている講演者がどんなに多いことか！問題解決の糸口をつかみ、その現象について正しく考えた時、不可解な現象がいかに明白なものになっていくのかを見ていく感覚的な楽しさを聴衆に味わってもらいたいのだ。だから最初は聴衆を戸惑わせるようにするといい。

講義の際に居眠りをしがちだという事はみんなわかっているし、私自身居眠りをして何度恥ずかしい思いをしたことか知れない。どんなにいい講演者でさえ全く眠気を誘わないなんて事はありえないが、眠気を誘うのを最小限に食い止めておくためにできることはたくさんある。ずっと同じように話すのは致命的だ。眠気を誘う催眠術のようなものがあるのだ。緩急をつけるのが大切である。とりわけジョークの効果は際立っているし、長持ちする。

(i) ・相違

“talk” は物の見方を構築するための物であるのに対して、“paper” は情報の蓄積を目的とする。

・successful talk とは

話の内容を次の日に覚えている人が数多くいるような講義。

(ii)
- ある一つのメインテーマを伝えるように構成を考えること
- 話の始めの１０分間にこれから話す内容の下準備をすること
- 聴衆には話の始めで戸惑わせること
- 聴衆が眠らないように話に緩急をつけ、ジョークを言うこと

(iii) (ア) １つ目のパラグラフのみに該当。不適切。

(イ) 両方のパラグラフの内容を持っているといってもいいかもしれない。正解。

(ウ) ２つ目のパラグラフのみに該当。不適切。

(エ) １つ目のパラグラフのみに該当。不適切。

(オ) どちらのパラグラフの主題でもない。不適切。

2. **(i)** Comparing the Schrödinger equation with the classical energy-momentum equation, we can see that, at least for a free particle, energy and momentum correspond to the differential operators which act on the wave function ψ, as follows:

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad p \to -i\hbar\nabla$$

(ii) The famous experiment by Michelson and Morley showed that the speed of light is constant for all directions, irrespective of the relative motion among the observer, the transmitting medium,and the source.

(iii) Therefore, the Galilean transformation, under which classical mechanics is invariant, is found to be incorrect and should be replaced by another, under which the speed of light is constant.

(iv) Einstein showed that such a transformation would inevitably change the concept of time and simultaneity which had been believed differently before.

■ 教育 数学 解答

1. **(i)**

$$\oint_C (E_x dx + E_y dy) = \iint_S \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

の時、固定点 $O(x_0, y_0)$ から $P(x, y)$ までの線積分は経路に依らないから

$$\varphi(x, y) = \int_O^P (E_x dx + E_y dy)$$

とおける。この場合、線積分が経路に依らないので、まず x 軸に平行に $(x_0, y_0) \to (x, y_0)$ と動かし、次に y 軸に平行に $(x, y_0) \to (x, y)$ と動かす経路を取ると、

$$\varphi(x, y) = \int_{x_0}^{x} E_x(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y} E_y(x, y) dy$$

と書くことができる。従って、この式より、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= E_x(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial E_y}{\partial x} dy \\
&= E_x(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial E_x}{\partial y} dy \qquad \left(\because \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0\right) \\
&= E_x(x, y_0) + E(x, y) - E_x(x, y_0) \\
&= E_x(x, y)
\end{aligned}$$

また、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = E_y(x, y)$$

が得られる。よって、

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{grad}\, \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$$

と書ける。

(ii)

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -2y, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = -2y. \qquad \therefore \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y) &= \int_O^{(x,y)} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \varphi(0, 0) \\
&= \int_O^{(x,0)} E_x dx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} E_y dy + C \quad (C \text{ は定数}) \\
&= \int_{(0,0)}^{(x,0)} (x^2 - y^2) dx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} (-2xy) dy + C \\
&= \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + C
\end{aligned}$$

(iii) $\Psi(x, y) - a = 0$ の法線が $\boldsymbol{E}(x, y) = (x^2 - y^2, -2xy)$ と直交すれば良い。

$$\nabla[\Psi(x, y) - a] \cdot \boldsymbol{E}(x, y) = 0$$

ここで例えば

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 2xy \qquad \cdots (1)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = x^2 - y^2 \qquad \cdots (2)$$

を取ることができる。(3) より

$$\Psi(x,y) = x^2 y + C(y) \qquad （C(y) \text{ は } y \text{ だけの関数}）$$

これを (3) に代入して

$$x^2 + C'(y) = x^2 - y^2$$

$$C'(y) = -y^2 \qquad \therefore C(y) = -\frac{1}{3}y^3 + c \qquad （c \text{ は定数}）$$

$$\therefore \Psi(x,y) = x^2 y - \frac{1}{3}y^3 + c$$

よって求める曲線群は

$$\Psi(x,y) = x^2 y - \frac{1}{3}y^3 = a \qquad （a \text{ は定数}）$$

2. **(i)**

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^2(1-\lambda) + 2\lambda = -\lambda(\lambda-2)(\lambda+1) = 0$$

より固有値は $-1, 0, 2$.

固有値が -1 の時、長さ 1 の固有ベクトルとして $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$,

固有値が 0 の時、長さ 1 の固有ベクトルとして $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$,

固有値が 2 の時、長さ 1 の固有ベクトルとして $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ がとれる。

よって

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

が求める正規化された固有ベクトルである。

(ii)

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^\dagger = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{X}^\dagger = \mathbf{X}^{-1}$$

(i) で求めた各固有ベクトルを $\boldsymbol{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} \equiv \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ とおき、$\mathbf{P} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ として行列 $\mathbf{P}$ を定めると、

$$\mathbf{AP} = \mathbf{A}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \equiv \mathbf{PQ}$$

となっているので、$\mathbf{A} = \mathbf{PQP^{-1}}$ と書ける。

$$\begin{aligned}\mathbf{B} = \mathbf{XAX}^\dagger = \mathbf{XAX^{-1}} &= \mathbf{X}(\mathbf{PQP^{-1}})\mathbf{X^{-1}} \\ &= \mathbf{XPQ}(\mathbf{XP})^{-1}\end{aligned}$$

であるので、

$$\mathbf{B}(\mathbf{XP}) = \mathbf{XPQ}$$

よって

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{X}\boldsymbol{a}, \mathbf{X}\boldsymbol{b}, \mathbf{X}\boldsymbol{c}) &= (\mathbf{X}\boldsymbol{a}, \mathbf{X}\boldsymbol{b}, \mathbf{X}\boldsymbol{c})\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= (-1 \cdot \mathbf{X}\boldsymbol{a}, 0 \cdot \mathbf{X}\boldsymbol{b}, 2 \cdot \mathbf{X}\boldsymbol{c})\end{aligned}$$

と書けるので、$\mathbf{B}$ の固有値は $-1, 0, 2$ であり、$\mathbf{X}\boldsymbol{a}$、$\mathbf{X}\boldsymbol{b}$、$\mathbf{X}\boldsymbol{c}$ は $\mathbf{B}$ の固有ベクトルとなっている。また

$$\begin{aligned}(\mathbf{X}\boldsymbol{a}, \mathbf{X}\boldsymbol{a}) &= (\boldsymbol{a}, \mathbf{X}^\dagger\mathbf{X}\boldsymbol{a}) \\ &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \qquad (\because \mathbf{X}^\dagger\mathbf{X} = \mathbf{E}) \\ &= 1 \qquad (\because \boldsymbol{a} \text{ は単位ベクトル})\end{aligned}$$

よって $\mathbf{X}\boldsymbol{a}$ は単位ベクトルであることが言える。
以上より、$\mathbf{X}\boldsymbol{a}$、$\mathbf{X}\boldsymbol{b}$、$\mathbf{X}\boldsymbol{c}$ は $\mathbf{B}$ の正規化された固有ベクトルであることが言える。よって求めるベクトルは、

$$\mathbf{X}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}\boldsymbol{c} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(iii)

$$F = \sum_{i=1}^{3} |\alpha_i| = |-1|^2 + |0|^2 + |2|^2 = 5$$

$$G = \sum_{i,j=1}^{3} |a_{ij}|^2 = 5$$

(iv)

$$\mathbf{B} = (b_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

とおく。
エルミート行列 $\mathbf{A}$ はユニタリ行列 $\mathbf{U}$ を用いて、

$$\mathbf{U}^\dagger\mathbf{AU} = \mathbf{B}$$

のように対角化できる。
まず、

$$\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = F \qquad \cdots (3)$$

が成り立つ。

以下では、和記号を明記しない場合を除いては、同じ添字が 2 度現れたときには和を取るものとすると、

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n}|b_{ij}|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n}|(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{U})_{ij}|^2 \\
&= (\mathbf{U}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{U})_{ij}\overline{(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{U})}_{ij} \\
&= \left(U^{-1}_{ik}a_{kl}U_{lj}\right)\left(U_{mi}\overline{a}_{mn}U^{-1}_{jn}\right) \\
&= \delta_{mk}\delta_{ln}a_{kl}\overline{a}_{mn} \\
&= a_{kl}\overline{a}_{kl} \\
&= G
\end{aligned} \qquad \cdots (4)$$

ここで、ユニタリ行列に関する次の性質を用いた。

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^\dagger &= \mathbf{U}^{-1} \\
\overline{\mathbf{U}}^\dagger &= \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \\
\overline{\mathbf{U}} &= \left(\mathbf{U}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

(3)(4) より、

$$F = G$$

が成り立つ。

3. **(i)** (2) 式と

$$\delta(x)\delta(t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\ e^{i(kx-\omega t)}$$

を (1) 式に代入すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\omega(-\kappa^2k^2+i\omega)g(k,\omega)e^{i(kx-\omega t)} = -\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\omega e^{i(kx-\omega t)}$$

従って、$g(k,\omega)$ の満たすべき方程式は、

$$(\kappa^2k^2-i\omega)g(k,\omega) = 1$$

従って、

$$g(k,\omega) = \frac{1}{\kappa^2k^2-i\omega}$$

である。

(ii) **(i)** で求めた $g(k,\omega)$ を (2) に代入すると、

$$G(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{1}{\kappa^2k^2-i\omega}e^{i(kx-\omega t)}$$

これを ω について積分する。今、

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{e^{-i\omega t}}{\kappa^2k^2-i\omega}$$

なる I を考えるとする。$z=\kappa^2k^2-i\omega$ とおくと、

$$\begin{cases}
I = \dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_{r+i\infty}^{r-i\infty}dz\ \frac{e^{zt}}{z}e^{-\kappa^2k^2t} \\
r = \kappa^2k^2
\end{cases}$$

となる。さて、ステップ関数 $\theta(t)$ は、

$$\theta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{R-i\infty}^{R+i\infty} dz\, \frac{e^{zt}}{z} = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \qquad (R \text{ は任意の実数})$$

ということが、留数定理から分かる。従って I は、

$$I = \theta(t)e^{-\kappa^2 k^2 t}$$

である。従って、

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \theta(t) e^{-\kappa^2 k^2 t} e^{ikx}$$

(iii) 設問 **(ii)** の結果より

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \frac{1}{2\pi}\theta(t)\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \exp\left[-\kappa^2 t\left(k - \frac{ix}{2\kappa^2 t}\right)^2\right]\exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa^2 t}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\theta(t)\sqrt{\frac{\pi}{\kappa^2 t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa^2 t}\right) \end{aligned}$$

■ 教育 物理 解答

1. **(i)** 重力加速度は、次のように表される。（M_e：地球の質量）

$$g = \frac{GM_e}{R^2} \quad \cdots (1)$$

またエネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}Mv_{\mathrm{esc}}^2 - G\frac{MM_e}{R+h} = 0 \quad \cdots (2)$$

(1), (2), $R \gg h$ より

$$\frac{1}{2}v_{\mathrm{esc}}^2 = G\frac{M_e}{R} = gR$$
$$v_{\mathrm{esc}} = \sqrt{2gR} \simeq 1.1 \times 10^4 \text{ [m/s]}$$

(ii) 時間 dt に噴射されるガスの質量を dm とすると、ガスの受ける力積は鉛直上向きを正とすると $dm = -dM$ より

$$-u\,dm = u\,dM$$

よって、ロケットの受ける力積は $-u\,dM$
したがって、噴射によりロケットが受ける力積は $-u\frac{dM}{dt}$ なので

$$M\frac{dv}{dt} = -u\frac{dM}{dt} - Mg$$

(iii) 運動方程式より

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{u}{M}\frac{dM}{dt} - g$$

これを積分すれば

$$\Delta v = u\log\frac{M_i}{M_f} - g\Delta t \quad \cdots (3)$$

Δv を大きくするには

- ●噴射速度 u を大きくする
- ●M_i/M_f を大きくする（燃料の量を増やす）

(iv) $\frac{dv}{dt} = ng$ より

$$v = ng(t-t_0) + v(t_0)$$
$$h = \frac{1}{2}ng(t-t_0)^2 + v(t_0)(t-t_0) + h(t_0)$$

よって、

$$\Delta v = ng\Delta t$$

これを (3) に代入して

$$(1+n)g\Delta t = u\log\frac{M_i}{M_f}$$

ゆえに

$$\Delta t = \frac{1}{1+n}\frac{u}{g}\log\frac{M_i}{M_f}$$
$$\Delta v = \frac{n}{1+n}u\log\frac{M_i}{M_f}$$
$$\Delta h = \frac{1}{2}\frac{n}{(1+n)^2}\frac{u^2}{g}\left(\log\frac{M_i}{M_f}\right)^2 + v(t_0)\frac{1}{1+n}\frac{u}{g}\log\frac{M_i}{M_f}$$

(v) エネルギー等分配則より、分子の内部構造の自由度を f とすると、（たとえば 2 原子分子なら $f = 2$）

$$\frac{1}{2}mu_0^2 = \frac{3+f}{2}kT$$

よって

$$u_0 = \sqrt{\frac{3+f}{m}kT}$$

噴射速度を大きくするには、燃料の分子の質量を小さくするか、f が大きいものを選べばよい。最良の燃料は水素。

(vi) [1] $m \simeq 2m_p = 3.4 \times 10^{-27}$ [kg]

$$u_0 = \sqrt{\frac{5 \times 1.4 \times 10^{-23} \times 2000}{3.4 \times 10^{-27}}} = 6.4 \times 10^3 \text{ [m/s]}$$

(vii) $v(t_0) = 0$ とすると

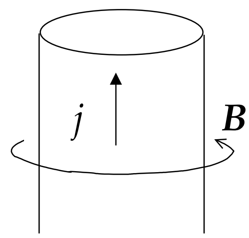
$$v_f = \frac{4}{5} \times 3 \times 10^3 \times 2 \times 0.7 = 3.4 \times 10^3 \text{ [m/s]}$$

これは v_{esc} よりもかなり小さい。v_{esc} を得るには、u を上げる、つまり、燃焼温度を上げる必要がある。これには、水素と、それを燃やすのに必要な酸素の混合比を変える方法がある。

混合比の変更のみで十分な温度が得られるか確実でなく、限界があるようであれば、ロケットの一部を逆方向に運動量を与えて切り離すなどの方法を組み合わせる必要が生じる。

2. **(i)** $j = \rho_- v$

(ii) アンペールの法則より



0. (i) $r \le a$ の時

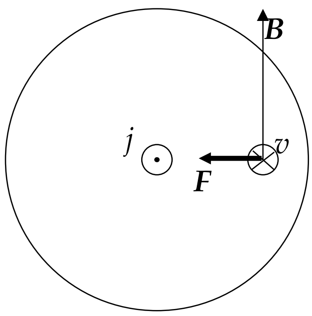
$$2\pi r B = \mu_0 j \pi r^2$$
$$B = \frac{\mu_0 j}{2} r$$

0.(ii) $r \ge a$ の時

$$2\pi r B = \mu_0 j \pi a^2$$
$$B = \frac{\mu_0 j a^2}{2r}$$

(iii)

$$F_{\mathrm{Lorentz}} = evB \text{（中心内向き）}$$

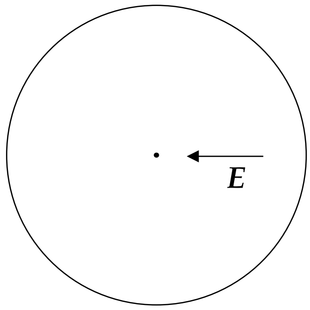


[1] より現実的には、液体水素と液体酸素を反応させてできた水分子を噴射することになるので、分子量 $18m_p$、$f = 6$ を用いなければならない、との指摘がある。問題文では燃料として蓄えられた物質の分子量=噴射する分子の分子量となっているように読めるので、そこまで求められているかはわからない。(2003 年度注)

(iv) ガウスの法則より (E は外向きを正とする)

$$2\pi r l E = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_0 - \rho_-) l \pi r^2$$

$$E = \frac{\rho_0 - \rho_-}{2\varepsilon_0} r \ (\text{中心内向き})$$



(v) 負電荷が多く分布する。

(vi) $\rho_+ = \rho_-$ より $\Delta\rho_+ = 0$. また、$\boldsymbol{F}_{\text{Lorentz}} + (-e)\boldsymbol{E} = 0$ より

$$ev \frac{\mu_0 \rho_- v}{2} r = e \frac{\rho_- - \rho_0}{2\varepsilon_0} r$$

$$\frac{v^2}{c^2}\rho_- = \rho_- - \rho_0 \qquad \left(c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\right)$$

$$\therefore -\rho_- = -\frac{\rho_0}{1 - v^2/c^2}$$

$$\simeq -\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)\rho_0$$

$$\therefore \Delta(-\rho_-) = -\frac{v^2}{c^2}\rho_0$$

(vii) 電子の数密度を n とすると

$$n = \frac{9 \times 10^3 \ [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}] \cdot 6 \times 10^{23} \ [\text{mol}^{-1}]}{63.55 \times 10^{-3} \ [\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}]} \fallingdotseq 8.4 \times 10^{28} \ [\text{m}^{-3}]$$

$$\rho_- = 1.6 \times 10^{-19} \ [\text{C}] \cdot 8.4 \times 10^{28} \ [\text{m}^{-3}] \fallingdotseq 1.3 \times 10^{10} \ [\text{C} \cdot \text{m}^{-3}]$$

$$j = \frac{1 \ [\text{A}]}{10^{-6} \ [\text{m}^2]} = 10^6 \ [\text{A} \cdot \text{m}^{-2}]$$

$$\therefore v = \frac{j}{\rho_-} \fallingdotseq 7.6 \times 10^{-5} \ [\text{m/s}] \fallingdotseq 8 \times 10^{-5} \ [\text{m/s}]$$

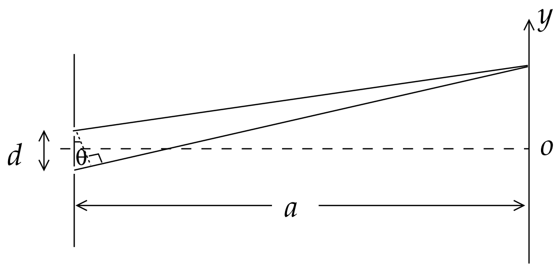
$$\therefore \frac{\Delta\rho_-}{-\rho_0} = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \fallingdotseq 6 \times 10^{-26}$$

1. **(i)**

$$d \sin\theta = m\lambda$$

$$\frac{dy}{a} = m\lambda$$

$$\therefore s = \frac{a}{d}\lambda = 1 \times 10^{-3}\text{m} = 1\text{mm}$$



(ii) 公式 $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{f}$ より

$$b = \frac{af}{a - f} = 45\text{cm}$$

$$D = \frac{b}{a}d = \frac{45}{5} \cdot 30\mu\text{m} = 0.27\text{mm}$$

(iii) $d = 2\mu\text{m}$ より $s = 15\text{mm}$。一方、レンズの半径は 10mm。
よって、レンズには 0 次回折光の情報しか来ていないのでスリットが単スリットである時と同じ状況になっている。だから、スクリーンにはまるで単スリットから出た光のような像がうつる。

(iv) 1 次回折光がレンズを通ればよい。レンズの半径は 1cm だから

$$d_0 = \frac{5\text{cm} \times 0.6\mu\text{m}}{1\text{cm}} = 3\mu\text{m}$$

(v) (i)波長を変えない時
レンズを大きくする。
半径 1.5cm 以上にすれば 1 次回折光がレンズを通るから。

(ii)波長を変える時
波長を短くする。
s が小さくなって 1 次回折光がレンズを通るから。