1999年度　入学試験 一般教育科目（英語なし）

■ 教育 数学

1. 2 次元空間におけるベクトル場 $\boldsymbol{E}(x, y)$ の各成分 $E_x(x, y)$, $E_y(x, y)$ は、必要な階数まで微分可能であるとして、以下の設問に答えよ。

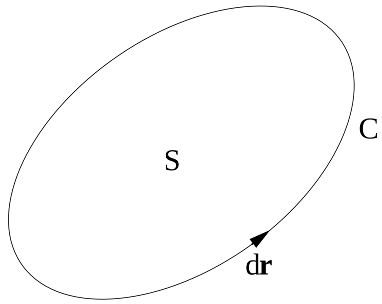
(i) $\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = 0$ のとき、あるスカラー場 $\varphi(x, y)$ が存在して、

$\boldsymbol{E} = \mathrm{grad}\,\varphi = \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$　と表せることを示せ。

但し、次の関係を用いて良い。

$$\iint_S \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_C (E_x \mathrm{d}x + E_y \mathrm{d}y)$$

ここで S は閉じた道 C で囲まれる領域の内部であり、線積分の向きは反時計回りである。



(ii) $\boldsymbol{E} = (x^2 - y^2, -2xy)$ のとき $\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = 0$ となることを示し、設問 (i) における $\varphi(x, y)$ を求めよ。

(iii) 点 (x, y) における接線が、設問 (ii) の $\boldsymbol{E}(x, y)$ と平行になる曲線群 $\Psi(x, y) = a$　(a = 定数) を決定せよ。

2. **(i)** 行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを全て求めよ。ただし、固有ベクトルは正規化せよ。

(ii) 次の行列

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

により、設問 (i) の行列 $\mathbf{A}$ を変換して得られる行列 $\mathbf{B} = \mathbf{XAX}^\dagger$ を考える。ただし、$\mathbf{X}^\dagger$ は $\mathbf{X}$ のエルミート共役行列である。行列 $\mathbf{B}$ の固有値、固有ベクトルを示せ。ただし、固有ベクトルは正規化せよ。

(iii) エルミート行列 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \quad (i, j = 1, \ldots, n)$ の固有値を $\alpha_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ とする。それらに関して次の 2 つの量、

$$F = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \quad , \quad G = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$$

を考える。設問 (i) の $\mathbf{A}$ に対して F と G を求めよ。

(iv) 設問 (iii) の F と G の関係を、一般のエルミート行列 $\mathbf{A}$ に対して述べよ。

3. 時刻 $t = 0$ において $x = 0$ に強さ 1 の熱を加えたときの、1 次元空間におけるその後の熱の伝導は、方程式、

$$\left(\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right) G(x,t) = -\delta(x)\delta(t) \qquad (\kappa \text{ は正定数}) \qquad \cdots (1)$$

の解 $G(x,t)$ によって記述される。ただし、$\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。また $t = -\infty$ で $G(x,t) = 0$ とする。

(i) $G(x,t)$ のフーリエ変換 $g(k,\omega)$ を次の式で定義する:

$$G(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(k,\omega) e^{i(kx-\omega t)} \mathrm{d}k \mathrm{d}\omega \qquad \cdots (2)$$

このとき $g(k,\omega)$ の満たすべき方程式を式 (1) より導き、$g(k,\omega)$ を求めよ。

(ii) 設問 (i) で求めた $g(k,\omega)$ を式 (2) に代入し、ω 積分を実行せよ。

(iii) 設問 (ii) に続いて k 積分を実行し、$G(x,t)$ を求めよ。ただし、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} \mathrm{d}\alpha = \sqrt{\pi} \qquad \cdots (3)$$

を用いてよい。

■ 教育 物理

1. ロケットを垂直上方に打ち上げて、地球の重力圏を脱したい。時刻 t におけるロケットの高さ、速度および質量をそれぞれ $h(t)$, $v(t) = \frac{dh}{dt}$, $M(t)$、ロケットから噴射されるガスの、ロケットに対する相対速度を u とする。重力加速度を $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$、地球の半径を $R = 6370\ \mathrm{km}$ として、以下に答えよ。なお、相対速度 u は一定であるとし、空気抵抗は無視せよ。

   (i) 地球の重力圏を脱出するためには噴射が終わったときの速度がある値（脱出速度：v_{esc}）を越えている必要がある。噴射終了時の高度は R に比べて十分小さいとして v_{esc} を求めよ。

   (ii) ロケットの運動方程式は、
$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -u\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} - Mg$$
   で与えられる。この式を導け。

   (iii) 燃料の噴射時間を Δt とし、噴射開始時および噴射終了時の全質量をそれぞれ、$M_i = M(t_0)$, $M_f = M(t_0 + \Delta t)$ とおくとき、この間の速度変化 $\Delta v = v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)$ を求めよ。また、噴射時間内の速度変化 Δv を増やすにはどうしたらよいかを述べよ。

   (iv) 簡単のため、ロケットの加速度は一定であるとし、$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ng$ とおく。ここに、加速度係数 n は、乗組員や機内の装置に支障が生じないように選ばれた定数である。噴射開始時の質量 M_i と噴射終了時の質量 M_f の差がすべて燃料であるとして、燃料噴射時間 Δt、噴射による速度変化 Δv、および高度変化 Δh を求めよ。

   (v) 燃料の燃焼温度を T K とするとき、燃料ガスの噴射速度 u は、燃料の分子がこの温度の下で持つ平均の運動エネルギーから決まる平均速度を超えられない。燃料分子の質量を m、ボルツマン定数を k として、燃料分子の平均速度 u_0 をあらわせ。また、$u = u_0$ が実現できたとして、燃料ガスの噴射速度を大きくするには、どうしたらよいかを述べ、最良の燃料として何を選んだらよいかを言え。

   (vi) 燃焼温度を $T = 2000$ K、$k = 1.4\times10^{-23}$ J/K、陽子の質量 m_p を 1.7×10^{-27} kg で与えられるとき、設問 (v) で選んだ燃料から期待される最高噴射速度を求めよ。

   (vii) 実際のロケットでは、構造上、噴射開始時および噴射終了時の全質量の比 $\frac{M_i}{M_f}$ は、高々4 程度にしかできない。燃料ガスの噴射速度を $u = 3$ km/s、加速度係数を $n = 4$ として、期待される最終速度を求め、脱出速度と比較せよ。この結果と設問 (v) と (vi) の結果から、脱出速度を得るためにどういう工夫をしたらよいかを論ぜよ。ただし、$\ln 2 = \log_e 2 = 0.7$ とおけ。

2. 半径 a の円形断面を持つ無限に長い直線導線がある。電流が流れていないとき、導線内の電荷分布は一様で、正電荷密度は $\rho_+ = \rho_0$、伝導電子による負電荷密度は $-\rho_- = -\rho_0$ であるが、電流を流すと、負電荷密度 $-\rho_-$ には $-\rho_0$ からのずれが生じる。これに関連した次の各設問に答えよ。
   導線の内外で誘電率および透磁率は、それぞれ真空での値 ε_0, μ_0 を用いてよい。

   (i) 外部電場が加わると電子は平均の移動速度（ドリフト速度）で流れる。この結果生ずる一様で定常な電流密度 j を電子の電荷密度 $-\rho_-$ と電子のドリフト速度 $v(> 0)$ で表せ。

   (ii) この電流が導線の内外に作る磁場（磁束密度 B）を、導線の中心からの距離 r の関数として求め、その向きを図示せよ。

   (iii) この磁場が導線内の一個の伝導電子に作用するローレンツ力の大きさを、電子のドリフト速度 v と磁場の大きさで表し、その向きを図示せよ。

   (iv) 伝導電子は、設問 (iii) で求めた磁場からのローレンツ力を受けているにもかかわらず定常的に運動している。それは磁場のローレンツ力をうち消す電場が作られているからである。この電場を求め、その向きを図示せよ。

   (v) これまでの結果をもとに、電流が流れると電荷分布がどう変化するかを簡潔に説明せよ。

(vi) 実際に変化した電荷分布を求めよ。ただし、正電荷密度を ρ_+、負電荷密度を $-\rho_-$ とおき、各電荷密度を ρ_0 と v で表し、電流が流れていない場合からの変化を求めよ。

(vii) 断面積 1 mm^2 の導線に 1 A の電流が流れるときの電子のドリフト速度を計算し、上で求めた電荷密度の変化の割合を評価せよ。ただし、銅の質量密度は 9×10^3 kg·m^{-3}、原子量は 63.55 であり、原子 1 個あたり自由電子が 1 個あるとする。また、素電荷は 1.6×10^{-19} C、アヴォガドロ定数は 6×10^{23} mol^{-1}、真空の光速度は 3×10^8 m/s とする。

3. **(i)** 図 1 に示すような実験器具で、単色光を使ったヤングの干渉実験を行った。光を単スリット A に通した後、複スリット B、C を通過させると、複スリットから回折した光が干渉し、その結果、スクリーン上に明暗の干渉縞ができた。複スリット B と C の間隔は、$d = 30\ \mu$m、複スリットとスクリーンとの間の距離は $a = 5$ cm であった。光は赤色で、波長は $\lambda = 0.6\ \mu$m である。この時、スクリーン上で観察される干渉縞の間隔（明線と明線の間隔）s を求めよ。
B、C の各々のスリットの幅は十分狭いとしてよい。

(ii) 次に、図 2 に示すような配置に変えた（垂直上方から見た図）。つまり、図 1 のスクリーンの位置にレンズを置き、スクリーンをその後方に移動させ、複スリットの拡大像をスクリーンに写し出した。使用したレンズは、直径 $L = 2$ cm で焦点距離 $f = 4.5$ cm のものである。この時、ピントのあった像を得るには、レンズとスクリーンの間の距離 b を何 cm にすればよいか。また、スクリーン上に輝線として写し出された複スリットの像の間隔 D は何 mm か。

(iii) 図 2 の配置のまま、複スリットを、B と C の間隔 $d = 2\ \mu$m のものに交換した。すると、スクリーン上に写し出された複スリットの像が 2 本の輝線ではなく、1 本の輝線として観察された。ルーペでスクリーン上の像を拡大してみても、輝線は 1 本のままであった。なぜ、複スリットの間隔が狭い場合には 2 本の輝線に分離して観察されないのか、理由を説明せよ。

(iv) スクリーン上で 2 本の輝線として観察される複スリットの最小間隔 d_0 を求めよ。

(v) 設問 (iii) の観察で、d_0 が狭い場合でも複スリットの像が 2 本に分離された輝線としてスクリーン上に写し出されるようにしたい。光源の波長を変えない場合、どのような工夫をすればよいか。また波長を変えてよい場合は、どのようにすればよいか。各々理由を付けて答えよ。

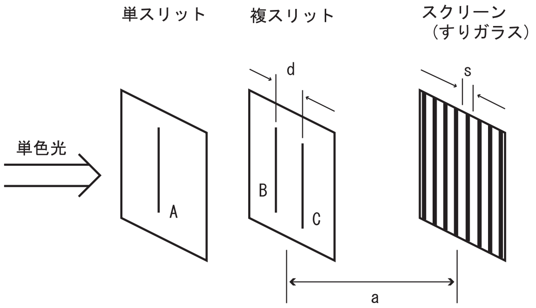


図 1

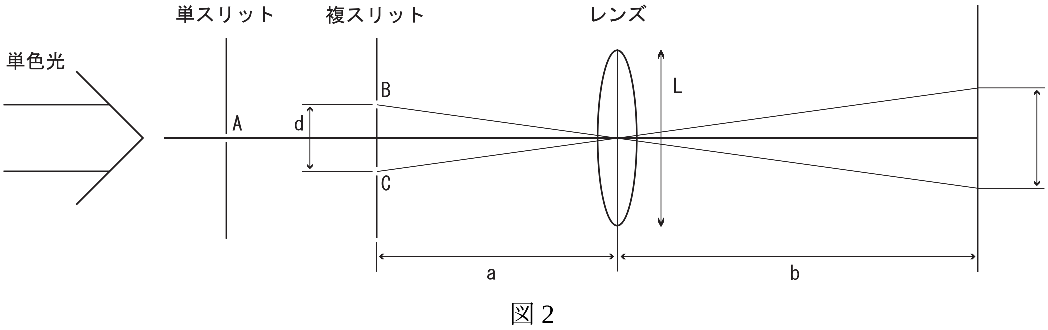


図 2

■ 教育 数学 解答

1. **(i)**

$$\oint_C (E_x dx + E_y dy) = \iint_S \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

の時、固定点 $O(x_0, y_0)$ から $P(x, y)$ までの線積分は経路に依らないから

$$\varphi(x,y) = \int_O^P (E_x dx + E_y dy)$$

とおける。この場合、線積分が経路に依らないので、まず x 軸に平行に $(x_0, y_0) \to (x, y_0)$ と動かし、次に y 軸に平行に $(x, y_0) \to (x, y)$ と動かす経路を取ると、

$$\varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} E_x(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y} E_y(x,y) dy$$

と書くことができる。従って、この式より、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= E_x(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial E_y}{\partial x} dy \\
&= E_x(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial E_x}{\partial y} dy \qquad \left(\because \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0\right) \\
&= E_x(x, y_0) + E(x,y) - E_x(x, y_0) \\
&= E_x(x,y)
\end{aligned}$$

また、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = E_y(x,y)$$

が得られる。よって、

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{grad}\,\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$$

と書ける。

(ii)

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -2y, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = -2y. \qquad \therefore \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \int_O^{(x,y)} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \varphi(0,0) \\
&= \int_O^{(x,0)} E_x dx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} E_y dy + C \quad (C \text{ は定数}) \\
&= \int_{(0,0)}^{(x,0)} (x^2 - y^2) dx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} (-2xy) dy + C \\
&= \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + C
\end{aligned}$$

(iii) $\Psi(x,y) - a = 0$ の法線が $\boldsymbol{E}(x,y) = (x^2 - y^2, -2xy)$ と直交すれば良い。

$$\nabla[\Psi(x,y) - a] \cdot \boldsymbol{E}(x,y) = 0$$

ここで例えば

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 2xy \qquad \cdots (1)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = x^2 - y^2 \qquad \cdots (2)$$

を取ることができる。(3) より

$$\Psi(x, y) = x^2 y + C(y) \qquad \text{（}C(y)\text{ は } y \text{ だけの関数）}$$

これを (3) に代入して

$$x^2 + C'(y) = x^2 - y^2$$

$$C'(y) = -y^2 \qquad \therefore C(y) = -\frac{1}{3}y^3 + c \qquad \text{（}c\text{ は定数）}$$

$$\therefore \Psi(x, y) = x^2 y - \frac{1}{3}y^3 + c$$

よって求める曲線群は

$$\Psi(x, y) = x^2 y - \frac{1}{3}y^3 = a \qquad \text{（}a\text{ は定数）}$$

2. **(i)**

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda^2(1 - \lambda) + 2\lambda = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

より固有値は $-1, 0, 2$.

固有値が -1 の時、長さ 1 の固有ベクトルとして $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$,

固有値が 0 の時、長さ 1 の固有ベクトルとして $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$,

固有値が 2 の時、長さ 1 の固有ベクトルとして $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ がとれる。

よって

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

が求める正規化された固有ベクトルである。

(ii)

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^\dagger = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{X}^\dagger = \mathbf{X}^{-1}$$

(i) で求めた各固有ベクトルを $\boldsymbol{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} \equiv \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ とおき、$\mathbf{P} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ として行列 $\mathbf{P}$ を定めると、

$$\mathbf{AP} = \mathbf{A}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \equiv \mathbf{PQ}$$

となっているので、$\mathbf{A} = \mathbf{PQP^{-1}}$ と書ける。

$$\begin{aligned}\mathbf{B} = \mathbf{XAX}^{\dagger} = \mathbf{XAX^{-1}} &= \mathbf{X}(\mathbf{PQP^{-1}})\mathbf{X^{-1}} \\ &= \mathbf{XPQ}(\mathbf{XP})^{-1}\end{aligned}$$

であるので、

$$\mathbf{B}(\mathbf{XP}) = \mathbf{XPQ}$$

よって

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{X}\boldsymbol{a}, \mathbf{X}\boldsymbol{b}, \mathbf{X}\boldsymbol{c}) &= (\mathbf{X}\boldsymbol{a}, \mathbf{X}\boldsymbol{b}, \mathbf{X}\boldsymbol{c})\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= (-1 \cdot \mathbf{X}\boldsymbol{a}, 0 \cdot \mathbf{X}\boldsymbol{b}, 2 \cdot \mathbf{X}\boldsymbol{c})\end{aligned}$$

と書けるので、$\mathbf{B}$ の固有値は $-1, 0, 2$ であり、$\mathbf{X}\boldsymbol{a}$、$\mathbf{X}\boldsymbol{b}$、$\mathbf{X}\boldsymbol{c}$ は $\mathbf{B}$ の固有ベクトルとなっている。また

$$\begin{aligned}(\mathbf{X}\boldsymbol{a}, \mathbf{X}\boldsymbol{a}) &= (\boldsymbol{a}, \mathbf{X}^{\dagger}\mathbf{X}\boldsymbol{a}) \\ &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) && (\because \mathbf{X}^{\dagger}\mathbf{X} = \mathbf{E}) \\ &= 1 && (\because \boldsymbol{a} \text{ は単位ベクトル})\end{aligned}$$

よって $\mathbf{X}\boldsymbol{a}$ は単位ベクトルであることが言える。
以上より、$\mathbf{X}\boldsymbol{a}$、$\mathbf{X}\boldsymbol{b}$、$\mathbf{X}\boldsymbol{c}$ は $\mathbf{B}$ の正規化された固有ベクトルであることが言える。よって求めるベクトルは、

$$\mathbf{X}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}\boldsymbol{c} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(iii)

$$F = \sum_{i=1}^{3} |\alpha_i| = |-1|^2 + |0|^2 + |2|^2 = 5$$

$$G = \sum_{i,j=1}^{3} |a_{ij}|^2 = 5$$

(iv)

$$\mathbf{B} = (b_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

とおく。
エルミート行列 $\mathbf{A}$ はユニタリ行列 $\mathbf{U}$ を用いて、

$$\mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{AU} = \mathbf{B}$$

のように対角化できる。
まず、

$$\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = F \qquad \cdots (3)$$

が成り立つ。

以下では、和記号を明記しない場合を除いては、同じ添字が 2 度現れたときには和を取るものとすると、

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}|b_{ij}|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n}|(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{U})_{ij}|^2\\ &= (\mathbf{U}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{U})_{ij}\overline{(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{U})}_{ij}\\ &= \left(U^{-1}_{ik}a_{kl}U_{lj}\right)\left(U_{mi}\overline{a}_{mn}U^{-1}_{jn}\right)\\ &= \delta_{mk}\delta_{ln}a_{kl}\overline{a}_{mn}\\ &= a_{kl}\overline{a}_{kl}\\ &= G \end{aligned} \qquad \cdots (4)$$

ここで、ユニタリ行列に関する次の性質を用いた。

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^\dagger &= \mathbf{U}^{-1}\\ \overline{\mathbf{U}}^\dagger &= \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\\ \overline{\mathbf{U}} &= \left(\mathbf{U}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

(3)(4) より、

$$F = G$$

が成り立つ。

3. **(i)** (2) 式と

$$\delta(x)\delta(t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\; e^{i(kx-\omega t)}$$

を (1) 式に代入すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\omega(-\kappa^2k^2+i\omega)g(k,\omega)e^{i(kx-\omega t)} = -\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\omega e^{i(kx-\omega t)}$$

従って、$g(k,\omega)$ の満たすべき方程式は、

$$(\kappa^2k^2-i\omega)g(k,\omega) = 1$$

従って、

$$g(k,\omega) = \frac{1}{\kappa^2k^2-i\omega}$$

である。

(ii) **(i)** で求めた $g(k,\omega)$ を (2) に代入すると、

$$G(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{1}{\kappa^2k^2-i\omega}e^{i(kx-\omega t)}$$

これを ω について積分する。今、

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{e^{-i\omega t}}{\kappa^2k^2-i\omega}$$

なる I を考えるとする。$z=\kappa^2k^2-i\omega$ とおくと、

$$\begin{cases} I = \dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_{r+i\infty}^{r-i\infty}dz\;\frac{e^{zt}}{z}e^{-\kappa^2k^2t}\\ r = \kappa^2k^2\end{cases}$$

となる。さて、ステップ関数 $\theta(t)$ は、

$$\theta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{R-i\infty}^{R+i\infty} dz\ \frac{e^{zt}}{z} = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \qquad (R \text{ は任意の実数})$$

ということが、留数定理から分かる。従って I は、

$$I = \theta(t) e^{-\kappa^2 k^2 t}$$

である。従って、

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \theta(t) e^{-\kappa^2 k^2 t} e^{ikx}$$

(iii) 設問 **(ii)** の結果より

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\theta(t)\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \exp\left[-\kappa^2 t\left(k - \frac{ix}{2\kappa^2 t}\right)^2\right]\exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa^2 t}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\theta(t)\sqrt{\frac{\pi}{\kappa^2 t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa^2 t}\right) \end{aligned}$$

■ 教育 物理 解答

1. **(i)** 重力加速度は、次のように表される。（M_e：地球の質量）

$$g = \frac{GM_e}{R^2} \qquad \cdots (1)$$

またエネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}Mv_{\mathrm{esc}}^2 - G\frac{MM_e}{R+h} = 0 \qquad \cdots (2)$$

(1), (2), $R \gg h$ より

$$\frac{1}{2}v_{\mathrm{esc}}^2 = G\frac{M_e}{R} = gR$$
$$v_{\mathrm{esc}} = \sqrt{2gR} \simeq 1.1 \times 10^4 \ [\mathrm{m/s}]$$

(ii) 時間 dt に噴射されるガスの質量を dm とすると、ガスの受ける力積は鉛直上向きを正とすると $dm = -dM$ より

$$-u\,dm = u\,dM$$

よって、ロケットの受ける力積は $-u\,dM$
したがって、噴射によりロケットが受ける力積は $-u\frac{dM}{dt}$ なので

$$M\frac{dv}{dt} = -u\frac{dM}{dt} - Mg$$

(iii) 運動方程式より

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{u}{M}\frac{dM}{dt} - g$$

これを積分すれば

$$\Delta v = u\log\frac{M_i}{M_f} - g\Delta t \qquad \cdots (3)$$

Δv を大きくするには

- 噴射速度 u を大きくする
- M_i/M_f を大きくする（燃料の量を増やす）

(iv) $\frac{dv}{dt} = ng$ より

$$v = ng(t - t_0) + v(t_0)$$
$$h = \frac{1}{2}ng(t-t_0)^2 + v(t_0)(t-t_0) + h(t_0)$$

よって、

$$\Delta v = ng\Delta t$$

これを (3) に代入して

$$(1+n)g\Delta t = u\log\frac{M_i}{M_f}$$

ゆえに

$$\Delta t = \frac{1}{1+n}\frac{u}{g}\log\frac{M_i}{M_f}$$
$$\Delta v = \frac{n}{1+n}u\log\frac{M_i}{M_f}$$
$$\Delta h = \frac{1}{2}\frac{n}{(1+n)^2}\frac{u^2}{g}\left(\log\frac{M_i}{M_f}\right)^2 + v(t_0)\frac{1}{1+n}\frac{u}{g}\log\frac{M_i}{M_f}$$

(v) エネルギー等分配則より、分子の内部構造の自由度を f とすると、（たとえば 2 原子分子なら $f = 2$）

$$\frac{1}{2}mu_0^2 = \frac{3+f}{2}kT$$

よって

$$u_0 = \sqrt{\frac{3+f}{m}kT}$$

噴射速度を大きくするには、燃料の分子の質量を小さくするか、f が大きいものを選べばよい。最良の燃料は水素。

(vi) [1]$m \simeq 2m_p = 3.4 \times 10^{-27}$ [kg]

$$u_0 = \sqrt{\frac{5 \times 1.4 \times 10^{-23} \times 2000}{3.4 \times 10^{-27}}} = 6.4 \times 10^3 \text{ [m/s]}$$

(vii) $v(t_0) = 0$ とすると

$$v_f = \frac{4}{5} \times 3 \times 10^3 \times 2 \times 0.7 = 3.4 \times 10^3 \text{ [m/s]}$$

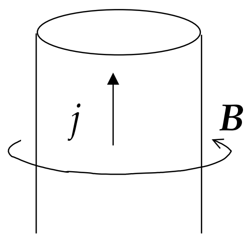
これは v_{esc} よりもかなり小さい。v_{esc} を得るには、u を上げる、つまり、燃焼温度を上げる必要がある。これには、水素と、それを燃やすのに必要な酸素の混合比を変える方法がある。

混合比の変更のみで十分な温度が得られるか確実でなく、限界があるようであれば、ロケットの一部を逆方向に運動量を与えて切り離すなどの方法を組み合わせる必要が生じる。

2. **(i)** $j = \rho_- v$

(ii) アンペールの法則より

0.(i) $r \le a$ の時



$$2\pi r B = \mu_0 j \pi r^2$$

$$B = \frac{\mu_0 j}{2} r$$

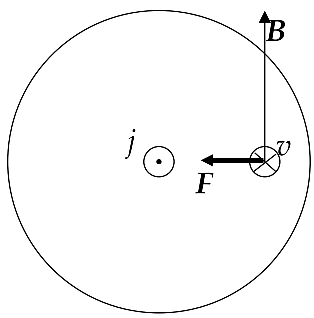
0.(ii) $r \ge a$ の時

$$2\pi r B = \mu_0 j \pi a^2$$

$$B = \frac{\mu_0 j a^2}{2r}$$

(iii)

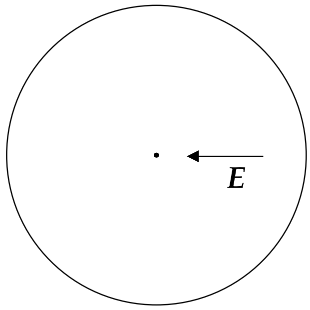
$F_{\mathrm{Lorentz}} = evB$（中心内向き）



[1] より現実的には、液体水素と液体酸素を反応させてできた水分子を噴射することになるので、分子量 $18m_p$、$f = 6$ を用いなければならない、との指摘がある。問題文では燃料として蓄えられた物質の分子量=噴射する分子の分子量となっているように読めるので、そこまで求められているかはわからない。(2003 年度注）

(iv) ガウスの法則より (E は外向きを正とする)

$$2\pi r l E = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_0 - \rho_-) l \pi r^2$$
$$E = \frac{\rho_0 - \rho_-}{2\varepsilon_0} r \ (\text{中心内向き})$$



(v) 負電荷が多く分布する。

(vi) $\rho_+ = \rho_-$ より $\Delta\rho_+ = 0$. また、$\boldsymbol{F}_{\text{Lorentz}} + (-e)\boldsymbol{E} = 0$ より

$$ev\,\frac{\mu_0\rho_- v}{2} r = e\,\frac{\rho_- - \rho_0}{2\varepsilon_0} r$$
$$\frac{v^2}{c^2}\rho_- = \rho_- - \rho_0 \qquad \left(c^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\right)$$
$$\therefore -\rho_- = -\frac{\rho_0}{1 - v^2/c^2}$$
$$\simeq -\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)\rho_0$$

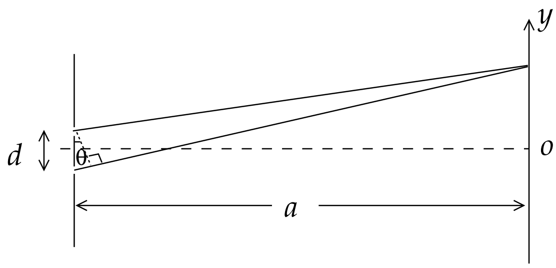
$$\therefore \Delta(-\rho_-) = -\frac{v^2}{c^2}\rho_0$$

(vii) 電子の数密度を n とすると

$$n = \frac{9 \times 10^3\ [\mathrm{kg \cdot m^{-3}}] \cdot 6 \times 10^{23}\ [\mathrm{mol^{-1}}]}{63.55 \times 10^{-3}\ [\mathrm{kg \cdot mol^{-1}}]} \fallingdotseq 8.4 \times 10^{28}\ [\mathrm{m^{-3}}]$$
$$\rho_- = 1.6 \times 10^{-19}\ [\mathrm{C}] \cdot 8.4 \times 10^{28}\ [\mathrm{m^{-3}}] \fallingdotseq 1.3 \times 10^{10}\ [\mathrm{C \cdot m^{-3}}]$$
$$j = \frac{1\ [\mathrm{A}]}{10^{-6}\ [\mathrm{m^2}]} = 10^6\ [\mathrm{A \cdot m^{-2}}]$$
$$\therefore v = \frac{j}{\rho_-} \fallingdotseq 7.6 \times 10^{-5}\ [\mathrm{m/s}] \fallingdotseq 8 \times 10^{-5}\ [\mathrm{m/s}]$$
$$\therefore \frac{\Delta\rho_-}{-\rho_0} = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \fallingdotseq 6 \times 10^{-26}$$

1.　**(i)**

$$d \sin\theta = m\lambda$$
$$\frac{dy}{a} = m\lambda$$
$$\therefore s = \frac{a}{d}\lambda = 1 \times 10^{-3}\mathrm{m} = 1\mathrm{mm}$$



(ii) 公式 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ より

$$b = \frac{af}{a - f} = 45\mathrm{cm}$$
$$D = \frac{b}{a}d = \frac{45}{5} \cdot 30\mu\mathrm{m} = 0.27\mathrm{mm}$$

(iii) $d = 2\mu\mathrm{m}$ より $s = 15\mathrm{mm}$。一方、レンズの半径は 10mm。
よって、レンズには 0 次回折光の情報しか来ていないのでスリットが単スリットである時と同じ状況になっている。だから、スクリーンにはまるで単スリットから出た光のような像がうつる。

(iv) 1 次回折光がレンズを通ればよい。レンズの半径は 1cm だから

$$d_0 = \frac{5\mathrm{cm} \times 0.6\mu\mathrm{m}}{1\mathrm{cm}} = 3\mu\mathrm{m}$$

(v) (i)波長を変えない時
レンズを大きくする。
半径 1.5cm 以上にすれば 1 次回折光がレンズを通るから。

(ii)波長を変える時
波長を短くする。
s が小さくなって 1 次回折光がレンズを通るから。