

2001 年度 入学試験 物理専門科目

問題 1

ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2 \quad \dots (1)$$

で記述される 1 次元調和振動子を考えよう。ここで \hat{p} は運動量演算子, \hat{x} は位置演算子。この系は演算子

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p}, \quad \dots (2)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p} \quad \dots (3)$$

を用いて調べることが出来る。以下の問に, 解答に至る筋道を添えて答えよ。

1. (1) 式のハミルトニアンを a, a^\dagger を用いて表せ。また, a, a^\dagger の物理的意味を述べよ。
2. 基底状態 $|0\rangle$ は関係 $a|0\rangle = 0$ を満たす。これを用いて座標表示の基底状態波動関数 $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$ を求めよ。また, 第一励起状態の波動関数 $\psi_1(x)$ を求めよ。ここでは規格化は考えなくてよい。
3. 基底状態 $|0\rangle$ に演算子 a^\dagger の指数関数をほどこして得られる状態

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha a^\dagger) |0\rangle, \quad \alpha \text{ は任意の複素数} \quad \dots (4)$$

はコヒーレント状態と呼ばれる。

- (i) コヒーレント状態が演算子 a の固有状態になっていることを示せ。
- (ii) コヒーレント状態の間の内積 $\langle \beta^* | \alpha \rangle$ を計算せよ。ただし $\langle \beta^* | = \langle 0 | \exp(\beta^* a)$ である。
- (iii) コヒーレント状態が n 番目の励起状態を含む確率を求めよ。
- (iv) コヒーレント状態について不確定性関係を調べよう。座標の期待値 $\langle \hat{x} \rangle \equiv \langle \alpha^* | \hat{x} | \alpha \rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle$ と座標の二乗の期待値 $\langle \hat{x}^2 \rangle \equiv \langle \alpha^* | \hat{x}^2 | \alpha \rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle$ を計算し, 座標の不確定さの二乗

$$(\Delta x)^2 = \langle (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 \rangle \quad \dots (5)$$

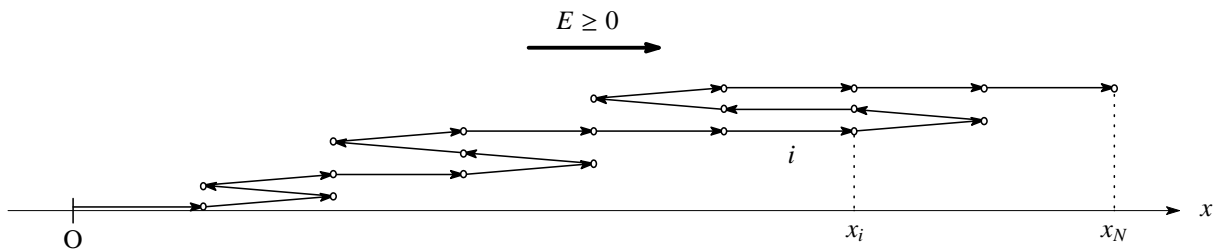
を求めよ。

- (v) 同様に運動量の不確定さの二乗 $(\Delta p)^2 = \langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \rangle$ を計算し, 不確定性関係を確かめよ。

問題 2

図のように、矢印で表される要素 N 個が x 方向に繋がった鎖状分子を考える。各要素はそれぞれ長さ b で、矢印の先端に電荷 $Q (> 0)$ をもつ。各要素は、矢印が $+x$ 方向に向くか、 $-x$ 方向に向くかの二つの状態のみ取りうるものとする。これを、 i 番目要素の状態変数 μ_i を導入し、 $\mu_i = +1$ または -1 で表す。1 番目要素の矢印の始点が点 $O (x = 0)$ に固定されていて、大きさ E の電場 ($E \geq 0$) が $+x$ の向きにかけられているものとする。また、この鎖状分子は温度 T の熱浴に接しているものとする。

電荷は外部電場 E とだけ相互作用し、電荷間の相互作用は無視できるものとする。また、 x と垂直方向への分子の広がりは無視できるものとし、ボルツマン定数を k_B として、以下の間に、解答に至る道筋を添えて答えよ。



1. まず、 $E = 0$ の場合を考える。

- (i) 分子の端点の位置 x_N の関数としてこの分子のエントロピー S を求めよ。ただし、 $L = bN$ とし、 $N, x_N/b \gg 1$ であるとして、必要であれば Stirling の公式、すなわち、 $x \gg 1$ のとき

$$\log x! \sim x \log x - x + \dots$$

を用いよ。

- (ii) 端点位置を x_N に保つために、この端点に加えなければならない力 X と x_N との関係を導け。
- (iii) $N \gg x_N/b (\gg 1)$ の場合、 X と x_N との関係式は近似的にどのように与えられるか。 x_N を外力 X に対する分子の伸びとみたとき、この分子はどのような弾性体と言えるか。

2. 次に、 $E > 0$ の場合を考える。

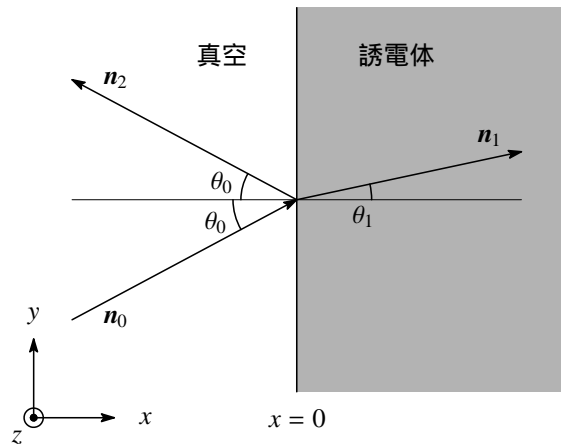
- (i) E が与えられたもとでのこの鎖状分子の分配関数 Z_N を、変数 $A \equiv bQE/k_B T$ を用いて表せ。
- (ii) i 番目要素の μ_i の平均値 $\langle \mu_i \rangle$ を求めよ。
- (iii) この鎖状分子の長さの平均値 $\langle x_N \rangle$ について、電場が十分小さい極限、 $NA \ll 1$ 、での表式を求めよ。 $\langle x_N \rangle$ を外力の総和 NQE に対する分子の伸びとみたとき、前問 1(c) との関連を論ぜよ。

問題 3

角振動数 ω の単色電磁波が真空から誘電体に入射する場合を考える。Maxwell の方程式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu}\right) &= \frac{\partial(\epsilon \mathbf{E})}{\partial t}. \end{aligned}$$

ここで E は電場, B は磁場, ϵ は誘電率, μ は透磁率を表す。図のように, 3次元空間において $x < 0$ が真空, $x > 0$ が誘電体であるとする。真空中の誘電率, 透磁率をそれぞれ ϵ_0, μ_0 で表し, 誘電体の誘電率は $\epsilon_1 (> \epsilon_0)$, 透磁率は μ_0 で与えられるものとする。電場, 磁場はそれぞれ, 入射波に対しては $E_0(\mathbf{r}, t)$, $B_0(\mathbf{r}, t)$, 屈折波に対しては $E_1(\mathbf{r}, t)$, $B_1(\mathbf{r}, t)$, 反射波に対しては $E_2(\mathbf{r}, t)$, $B_2(\mathbf{r}, t)$ とする。以下の問に, 解答に至る筋道を添えて答えよ。



1. 真空と誘電体の境界 $x = 0$ において,

$$E_{0,t}(0, y, z, t) + E_{2,t}(0, y, z, t) = E_{1,t}(0, y, z, t) \quad \dots (1)$$

$$\epsilon_0[E_{0,x}(0, y, z, t) + E_{2,x}(0, y, z, t)] = \epsilon_1 E_{1,x}(0, y, z, t) \quad \dots (2)$$

$$B_{0,t}(0, y, z, t) + B_{2,t}(0, y, z, t) = B_{1,t}(0, y, z, t) \quad \dots (3)$$

が成立する。ここで添字の t は各ベクトルの真空と誘電体の境界に平行な成分, 添字の x は x 成分を表す。

(i) (1) 式が成立することを示せ。

(ii) 誘導電荷密度 ρ と電場 E の間には関係式 $\epsilon_0 \nabla \cdot E = \rho$ が成立する。誘電体の表面 ($x = +0$) における電荷の面密度 $\sigma(y, z, t)$ を $E_{1,x}(0, y, z, t)$, ϵ_0 , ϵ_1 を用いて表せ。

2. 入射波の方向が xy 面にあるように座標軸をとり, x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ で表す。入射波の進行方向の単位ベクトルを $\mathbf{n}_0 = \hat{x} \cos \theta_0 + \hat{y} \sin \theta_0$ ($0 < \theta_0 < \pi/2$) とし, 入射波の磁場 $B_0(\mathbf{r}, t)$ が z 方向に直線偏光している場合,

$$B_0(\mathbf{r}, t) = \hat{z} B_0 \exp[i(k_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

を考える。入射波の電場は,

$$E_0(\mathbf{r}, t) = E_0 \exp[i(k_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

と表す。

- (i) k_0 を $\omega, \epsilon_0, \mu_0$ を用いて表せ。
- (ii) 入射波の電場の振幅 E_0 を $B_0, \hat{z}, k_0, n_0, \omega$ を用いて表せ。

3. 屈折波, 反射波の磁場をそれぞれ,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) &= \hat{z} B_1 \exp[i(k_0 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \\ \mathbf{B}_2(\mathbf{r}, t) &= \hat{z} B_2 \exp[i(k_0 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \end{aligned}$$

と表す。 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ はそれぞれ屈折波, 反射波の進行方向の単位ベクトルであり, これらを

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= \hat{x} \cos \theta_1 + \hat{y} \sin \theta_1, \\ \mathbf{n}_2 &= -\hat{x} \cos \theta_0 + \hat{y} \sin \theta_0 \end{aligned}$$

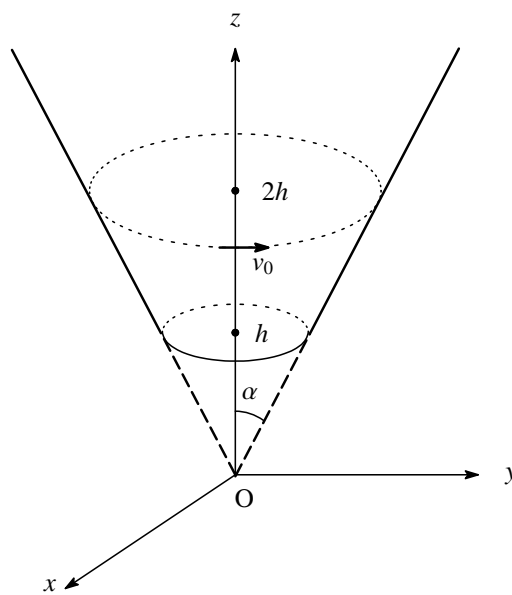
と表す。

- (i) (3) 式を用いて入射角 θ_0 と屈折角 θ_1 の関係式を求めよ。
- (ii) (1) 式と (3) 式を用いて B_1, B_2 を求めよ。答は $k_0, k_1, \theta_0, \theta_1, B_0$ を用いて表せ。
- (iii) $\theta_0 + \theta_1 = \pi/2$ のとき, 何が起こるか。

問題 4

図のように頂角が α の円錐を切り、鉛直軸に沿って逆さにして作った漏斗状の滑らかな面がある。切り口の高さを h として、この斜面上の質量 m の質点の運動を考える。以下の問に、解答に至る筋道を添えて答えよ。

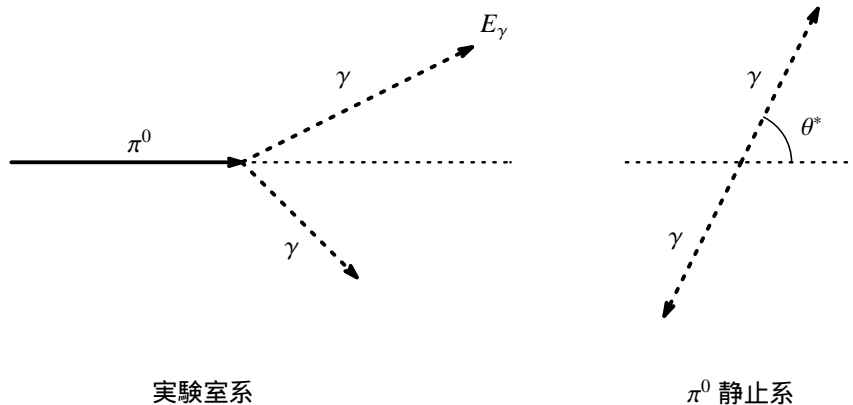
1. 鉛直方向に z 軸をとり、質点の座標を円柱座標 (z, θ) で表したとき、質点の斜面上の運動のラグランジアンを求めよ。ただし、重力の加速度定数を g とする。
2. この系の保存量を求めよ。
3. 質点が高さ $2h$ の斜面上で水平に初速度 v_0 で運動を始めたとする。初速度の違いによる質点の運動の違いについて述べよ。



問題 5

パイ中間子に関連する以下の問に，解答に至る筋道を添えて答えよ。

1. 陽子ビームを水素ターゲットに当てて中性パイ中間子 π^0 を生成するための，陽子ビーム運動エネルギーのしきい値を求めよ。但し，陽子の質量は $940 \text{ MeV}/c^2$ ， π^0 の質量 (m_π) は $135 \text{ MeV}/c^2$ とする。(MeV は 10^6 電子ボルト)
2. π^0 は 2 つの光子 (γ) に崩壊し， γ の角分布は π^0 の静止系で等方的であることが知られている。
 - (i) エネルギー E_π の π^0 からの崩壊における γ のエネルギー E_γ を， π^0 の静止系での γ の放出角 θ^* (図参照) で表し， E_γ の分布が一様であることを示せ。
 - (ii) エネルギー 30 GeV の π^0 の崩壊において，2 光子の間の角度の最小値を求めよ (GeV は 10^9 電子ボルト)
 - (iii) 一般に，高エネルギー π^0 ($E_\pi \gg m_\pi c^2$) の崩壊で 2 光子の間の角度分布は，その最小値の近くに鋭いピークを持つ。この理由を説明せよ。
3. 重水素に負電荷のパイ中間子 π^- を吸収させることによりパイ中間子原子が作られ，これが 2 個の中性子となる反応 ($\pi^- + d \rightarrow n + n$) が実際に観測されている。
 - (i) π^- のパリティを P_π としたとき，この反応の始状態の全角運動量とパリティを求めよ。ただし，この反応は π^- がパイ中間子原子の基底軌道に落ちてから起こるとし，また， π^- のスピンは 0，重陽子は陽子と中性子の 3S_1 の束縛状態であり，陽子と中性子のパリティは等しいことが知られているものとする。
 - (ii) 中性子はスピン $1/2$ のフェルミ粒子であることから，終状態の全スピンと軌道角運動量の間どのような関係があるかを述べよ。
 - (iii) 全角運動量が保存されることから導かれる，終状態がとりうる可能な全スピンと軌道角運動量の組み合わせを全て記せ。
 - (iv) これらより， π^- のパリティを決定せよ。



実験室系

 π^0 静止系

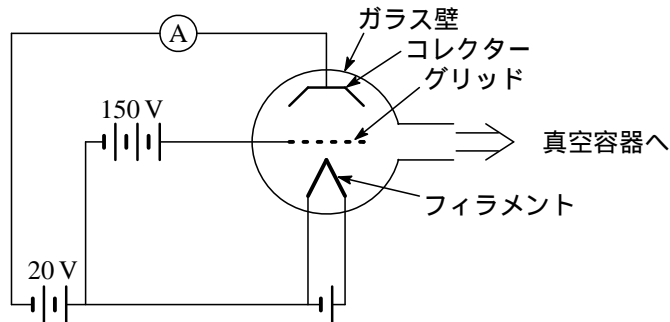
問題 6

1. 以下の問に，解答に至る筋道を添えて答えよ。

- (i) ある気体の圧力が $1.0 \times 10^{-5} \text{Pa}$ ，温度は 0°C の状態にある。この気体 1.0cm^3 中に気体分子は何個あるか。ここで，気体は理想気体とみなせるとし，1 気圧を $1.0 \times 10^5 \text{Pa}$ ，アボガドロ数を 6.0×10^{23} 個，標準状態 (0°C ，1 気圧) の理想気体 1 モルの体積を $22l$ とする。
- (ii) 加速された電子がこの気体分子に衝突すると，電子の運動エネルギーによって分子は電離してイオンとなる。この気体中で長さ 1.0cm を持つ領域に電流密度 1.0mA/cm^2 の電流が流れているとき，単位体積あたり 1 秒間に何個のイオンが生成されるか。ここで，この電子の衝突による分子の電離断面積を $3.0 \times 10^{-16} \text{cm}^2$ とし，素電荷を $1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ とする。また，電流の流れている体積内の圧力は常に一定で，生成されたイオンは直ちに遠方に飛び去り，単位体積内では電子と気体分子の衝突は最大 1 回までとする。

2. 高真空で使用する電離真空計では，電離させた残留気体分子によるイオン電流を測定し，その電流値を真空度に換算している。

- (i) 次の図は，電離真空計の模式図である。この真空計の動作原理を図中のフィラメント，グリッド，コレクターという言葉を使用して説明せよ。



- (ii) 表には，ある電離真空計において，希ガスの真空度 $1.0 \times 10^{-6} \text{Pa}$ のとき検出されるイオン電流値が，希ガス原子の種類別に示されている。このように希ガス原子の種類によってイオン電流値が異なる理由を定性的に説明せよ。

気体	He	Ne	Ar	Kr	Xe
イオン電流値 (nA)	0.1	0.3	1.3	1.7	2.4

- (iii) 電離真空計では，フィラメントから放出された電子がグリッドに衝突する際に発生する軟 X 線が原因となってイオン電流以外の電流が流れ，正確な真空度が測定できない。どのような電流が発生するかを述べよ。また，この効果を減少させ，高い真空度まで測定できるようにするためには，フィラメント，グリッド，コレクターのうちどれかを工夫すればよい。どのようにすればこの効果を減少させることができるかを述べよ。

3. 電離真空計はロータリーポンプで排気できる程度の真空では通常使用しない。その真空度で使用できる真空計をひとつ例にあげて，その動作原理を簡単に説明せよ。

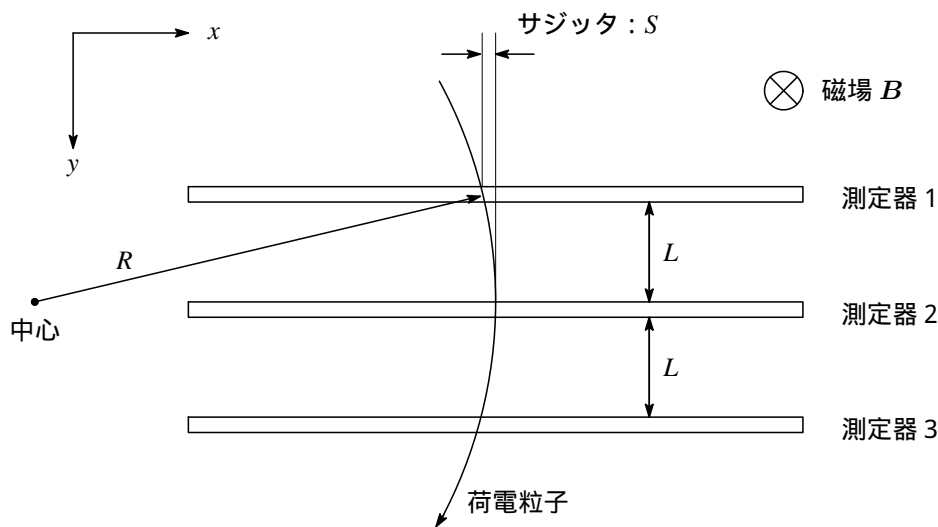
問題 7

電子と同じ電荷 e を持ち運動量 p [GeV/c] を持つ素粒子が一様磁場 B [Tesla] のもとで円運動をする。円運動の半径 R [m] は

$$R = \frac{p}{0.3B} \quad \dots (1)$$

に従う。

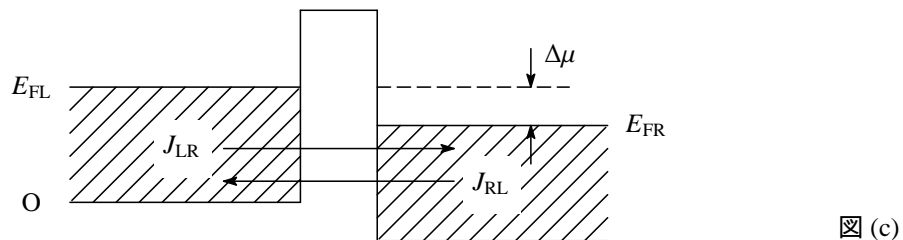
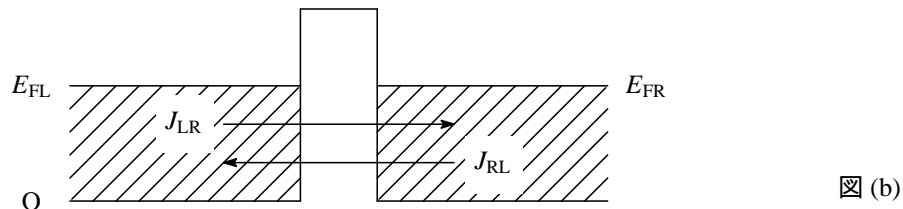
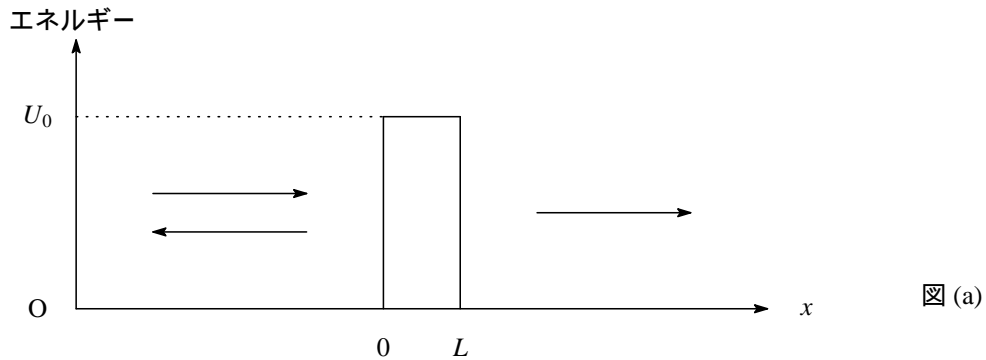
図のような装置を考える。磁場 B は紙面に垂直方向を向いており、3枚の平板状の位置検出器を、図の紙面では垂直に、等間隔 L で設置してある。矢印のついている円弧は荷電素粒子の軌跡である。なお、 L は円運動の半径 R に比べて十分小さい場合を考える。このような装置をマグネティック・スペクトロメータと呼んでいる。以下で、各位置検出器は有限な位置分解能を持つとして運動量測定について考えるが、運動量の測定誤差を δp とした場合に $\delta p/p$ を運動量分解能と定義する。以下の問に、解答に至る筋道を添えて答えよ。



- よりよい運動量分解能を得るためには強い磁場、測定器のより広い間隔、よりよい位置分解能が必要であることを直観的に説明せよ。また、運動量が小さい場合と大きい場合とどちらが運動量分解能が高いか答えよ。
- 以上の傾向を定量的に調べるために以下の設問に答えよ。なおここでは簡略化のため、荷電粒子は x - y 面内に入射し、円運動の中心は図のように2の測定器面上にあるとする。まず、図の S をサジッタと呼ぶ。
 - サジッタ S を L と R の関数で表せ。 $L \ll R$ であることを考慮して近似を用いること。さらに、(1) 式を用いてサジッタ S を L と p の関数で表せ。
 - サジッタに誤差 δS があると考え、 δp を $L, B, p, \delta S$ の関数で表せ。
 - この誤差の原因は測定器による誤差である。測定器 1, 2 および 3 は、等しい z 座標を持つ面上において x 方向のみ測定するとし、各測定器の位置分解能 (x 方向) は同じ値 σ を持つと仮定して、サジッタ S の誤差 δS を σ の関数で表せ。
 - 以上により、 $\delta p/p$ を L, B, p, σ の関数で表せ。
- 現実に、マグネティック・スペクトロメータを設計する際に、上記以外の要因も含めて、どのような点に留意せねばならないかを論ぜよ。

問題 8

1. 図 (a) のような幅 L , 高さ U_0 の箱形ポテンシャル障壁に、左側から入射するエネルギー E ($U_0 > E > 0$) を持つ粒子の 1 次元的な運動を考える。以下の問に、解答に至る道筋を添えて答えよ。なお、入射粒子の波動関数を e^{ikx} (ただし、 $\hbar^2 k^2 / 2m = E$, $k > 0$, m は粒子の質量) とする。電子間相互作用は無視してよい。



- (i) $x < 0$, $0 \leq x \leq L$, $x > L$ の各領域における粒子の波動関数をそれぞれ $\phi(x)$, $\phi(x)$, $\phi(x)$ として、その一般的な関数形を書け。例えば、 $Ae^{ikx} + \dots$ のように、適当な係数 A, \dots を使って記述してよい。
- (ii) 関数 $\phi(x)$, $\phi(x)$, $\phi(x)$ が満たすべき境界条件を書け。
- (iii) 電荷 $-e$ を持つ電子が右方へ入射するときに、障壁の透過率を T として、単位時間あたりに障壁を透過する電子の電荷の総量 (電流) j を求めよ。但し、エネルギー E を持つ電子は単位長さあたり n の密度を持つとする。
2. この系に電子を詰めた場合の電気伝導を考えよう。なお、全電子の密度を N , 電子のスピン縮重度を 2 とする。
- (i) 先ず、1 次元自由電子気体の、エネルギー E に対する単位長さ当たりの状態密度 $D(E)$, 及び絶対零度

におけるフェルミ速度 v_F を, m, h (プランク定数), N を用いて表せ。

- (ii) 図 (a) に示した, 障壁がある系におけるエネルギー分布を図 (b) のように表す。すなわち, 障壁の左側と右側の電子のフェルミ・エネルギーを, それぞれ E_{FL}, E_{FR} , 温度 T における分布関数をそれぞれ $f_L(E, T), f_R(E, T)$ とする。なお, 電子気体は低温で縮退しているものとする。このとき, 1次元導体を左から右へ流れる全電流 J は, 障壁を境として左から右に流れ込む電子による全電流 J_{LR} と, 右から左に流れ込む電子による全電流 J_{RL} の差 ($J = J_{LR} - J_{RL}$) として与えられる。 J_{LR} は

$$J_{LR} = -\frac{e}{2} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2E}{m}} D(E) f_L(E, T) [1 - f_R(E, T)] T(E) dE \quad \dots (1)$$

で与えられることを説明せよ。

- (iii) 図 (c) に示すように, 障壁の両端間に僅かの電圧 ΔV を加えて左側の電子のフェルミ・エネルギーを右側より $\Delta\mu$ ($\ll E_{FL} \approx E_{FR}$) だけ高くすると, 全電流が ΔJ だけ発生する。温度を絶対零度として ΔJ を計算し, $G = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta J}{\Delta V}$ で与えられる電気伝導度が

$$G = \left(\frac{2e^2}{h} \right) T(E_{FL})$$

と表せることを示せ。なお, $\Delta\mu$ と ΔV の間には $\Delta\mu = -e\Delta V$ の関係がある。

3. 上記のような導体系を作るために, 材料として Fe と n 形 Si を準備した。しかし, 両材料は見かけが似ているので区別がつかなくなってしまった。物理的な測定によって, 両者を見分けたい。Fe, n 形 Si を区別するために行うべき実験を 2 つ挙げよ。(理由も添えて, 各 40 字以内で)。ただし, 比重, 硬度, 光沢, 化学反応の違いは除く。

問題 9

1. 神経細胞の膜電位は、細胞膜をはさむ細胞内外のイオン濃度差および細胞膜の選択的イオン透過性に依存している。

- (i) 1mol の溶質が細胞内へと細胞膜を通過する際の自由エネルギー変化 ΔG は

$$\Delta G = -2.3RT \log_{10}(C_o/C_i) + zFV$$

で表される。ここで $R = 2.0 \times 10^{-3} \text{kcal/K}\cdot\text{mol}$ は気体定数、 T は K で表した絶対温度、 C_o は細胞外部での溶質の濃度、 C_i は細胞内部での溶質の濃度、 z は溶質のもつ電荷の価数、 $F = 23\text{kcal/V}\cdot\text{mol}$ はファラデー定数、 V はボルトで表した膜電位（細胞内電位）である。この式より、イオンの平衡電位を表すネルンストの式を導け。

- (ii) 静止状態において、神経細胞の細胞内電位は細胞外に対して負である。これは静止時の細胞膜が、或るイオン種に対して特に高い透過性をもつからである。下の表は、ヤリイカの巨大軸索における細胞内外の主なイオン種の濃度を示したものであるが、これを参照し、細胞膜が上記のイオン種のみを通すとした場合、その膜電位（細胞内電位）をネルンストの式を用い求めよ。ただし温度は 20°C とせよ。

イオン種	細胞内 (millimol/l)	細胞外 (millimol/l)
K^+	400	20
Na^+	50	440
Cl^-	51	560

- (iii) 活動電位（神経インパルス）の発生時においては、膜電位は一過性に正となる。この際起こる膜のイオンの透過性の一連の変化について、その分子機構を含め説明せよ。
- (iv) 神経インパルスは通常軸索基部において発生し軸索先端部へ向かい一方向に伝播する。途中から反対方向へと逆行しない理由を述べよ。

2. ショウジョウバエの *eyeless* 遺伝子の機能欠失変異体では眼の形成が起こらなくなる。

- (i) このことは *eyeless* 遺伝子が眼の形成に必要であることを示している。さらにこの遺伝子が眼の形成に十分な働きをもつかを調べるにはどのような実験を行えばよいかを述べよ。

- (ii) 上記の実験から *eyeless* 遺伝子は眼の形成に必要なかつ十分な活性をもつことが知られている。またこの遺伝子はある種の転写因子をコードすることが分かっている。以上のことから *eyeless* 遺伝子の働きについて推察せよ。

問題 1 解答

$$1. \quad a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p}, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p} \text{ を } \hat{x}, \hat{p} \text{ について解くと}$$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger + a), \quad \dots (1)$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a^\dagger - a) \quad \dots (2)$$

であるから, これらを与えられたハミルトニアンに代入して,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2 \\ &= \frac{1}{2m} \left[i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a^\dagger - a) \right]^2 + \frac{m\omega^2}{2} \left[\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger + a) \right]^2 \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} (aa^\dagger + a^\dagger a). \end{aligned} \quad \dots (3)$$

交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ より従う a と a^\dagger の間の交換関係:

$$[a, a^\dagger] = 1 \iff aa^\dagger = 1 + a^\dagger a \quad \dots (4)$$

を使えば, ハミルトニアンは

$$H = \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + a^\dagger a \right) \quad \dots (5)$$

の形に書かれる。

a, a^\dagger の物理的意味については次の通り。調和振動子の $n (= 1, 2, \dots)$ 番目のエネルギー固有値を E_n , これに属する固有状態を $|n\rangle$ としたとき, $|n\rangle$ に a を作用させた状態 $a|n\rangle$ は, 固有値 $E_n - \hbar\omega$ を持った調和振動子のエネルギー固有状態となり, また $|n\rangle$ に a^\dagger を作用させた状態 $a^\dagger|n\rangle$ は, 固有値 $E_n + \hbar\omega$ を持った調和振動子のエネルギー固有状態となる。このように調和振動子のエネルギー固有状態に作用したとき, エネルギー $\hbar\omega$ を持つ量子をそれぞれ消滅, 生成する意味で, a, a^\dagger はそれぞれ消滅演算子, 生成演算子と呼ばれる。また, ハミルトニアンの表式 (5) に現れた $a^\dagger a \equiv \hat{N}$ は個数演算子と呼ばれ, $\hat{N}(a^\dagger)^n|0\rangle = n(a^\dagger)^n|0\rangle$ が成り立つことから, \hat{N} の固有値は調和振動子の基底状態の上に励起しているエネルギー量子 $\hbar\omega$ の数を表す。

$$2. \quad a|0\rangle = 0 \text{ より } \langle x|a|0\rangle = 0. \text{ これを計算して,}$$

$$\begin{aligned} \langle x| \left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right] |0\rangle &= 0 \\ \iff \left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right) \right] \psi_0(x) &= 0 \\ \iff \left(\frac{m\omega}{\hbar} x + \frac{d}{dx} \right) \psi_0(x) &= 0. \end{aligned} \quad \dots (6)$$

これより基底状態の波動関数は

$$\psi_0(x) = \text{Const. exp} \left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 \right) \quad \dots (7)$$

と書ける¹。

また第一励起状態は $|1\rangle \propto a^\dagger |0\rangle$ として得られるから、規格化を考えなければ第一励起状態の波動関数は

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \langle x|1\rangle \propto \left\langle x \left| \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p} \right| 0 \right\rangle \\ &= \left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right) \right] \psi_0(x) \\ &= \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right) = \text{Const.} x \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right) \end{aligned} \quad \dots (9)$$

と求められる²。

3.

(i) $|\alpha\rangle = \exp(\alpha a^\dagger) |0\rangle$ の両辺に左から a を作用させる：

$$\begin{aligned} a|\alpha\rangle &= a \exp(\alpha a^\dagger) |0\rangle = a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \left[(a^\dagger)^n a + n (a^\dagger)^{n-1} \right] |0\rangle \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^{n-1}}{(n-1)!} |0\rangle = \alpha \exp(\alpha a^\dagger) |0\rangle \\ &= \alpha |\alpha\rangle. \end{aligned} \quad \dots (12)$$

従ってコヒーレント状態は消滅演算子 a の固有値 α に属する固有状態である。

(ii) $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ の両辺に第 n 励起状態のケットを作用させて、

$$\langle n|a|\alpha\rangle = \langle n|\alpha|\alpha\rangle \iff \sqrt{n+1} \langle n+1|\alpha\rangle = \alpha \langle n|\alpha\rangle. \quad \dots (13)$$

これより、

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \frac{\alpha}{\sqrt{n-1}} \frac{\alpha}{\sqrt{n-2}} \cdots \frac{\alpha}{\sqrt{1}} \langle 0|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|\alpha\rangle \quad \dots (14)$$

であるが、ここに

$$\langle 0|\alpha\rangle = \left\langle 0 \left| \exp(\alpha a^\dagger) \right| 0 \right\rangle = \left\langle 0 \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} \right| 0 \right\rangle = \langle 0|1|0\rangle = 1 \quad \dots (15)$$

¹規格化するならば、 $\langle 0|0\rangle = \int |\psi_0(x)|^2 dx = 1$ より Const. を求めればよい。結果は

$$\psi_0(x) = (\pi^{1/4} \sqrt{\eta})^{-1} \exp[-x^2/(2\eta^2)] \quad \dots (8)$$

と書ける。ここに調和振動子の長さのスケールを決めるパラメータ $\eta \equiv \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ を導入した。

²先程の η を用いれば規格化した形で

$$\psi_1(x) = (\pi^{1/4} \sqrt{\eta^{3/2}/\sqrt{2}})^{-1} x \exp[-x^2/(2\eta^2)] \quad \dots (10)$$

と書ける。一般に第 n 励起状態の波動関数 $\psi_n(x)$ は、 $\xi \equiv x/\eta$ 、 n 次のエルミート多項式 $H_n(\xi)$ を用いて、規格化した形で

$$\psi(\xi) = (2^n n!)^{-1/2} [m\omega/(\pi\hbar)]^{1/4} \exp(-\xi^2/2) H_n(\xi) \quad \dots (11)$$

と書ける。 $H_0(\xi) = 1$ 、 $H_1(\xi) = 2\xi$ 、 $H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$ 、...

であるから, $\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$ となる。従ってフォック状態の基底 $\{|n\rangle\}_{n=0,1,2,\dots}$ による $|\alpha\rangle$ の展開は,

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|\alpha\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad \dots (16)$$

となる。同様にして $\langle \beta^*| = \sum_m \frac{(\beta^*)^m}{\sqrt{m!}} \langle m|$ であるから, これらの内積は,

$$\langle \beta^*|\alpha\rangle = \sum_{n,m} \frac{(\beta^*)^m}{\sqrt{m!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle m|n\rangle = \sum_n \frac{(\beta^* \alpha)^n}{n!} = \exp(\beta^* \alpha) \quad \dots (17)$$

と計算される。

(iii) $|\alpha\rangle$ の規格化を考えると, 3-(b) の解答で $\beta = \alpha$ として, $\langle \alpha|\alpha\rangle = \exp(|\alpha|^2)$ であるから, 規格化されたフォック状態は

$$|\alpha_{normal}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\exp(|\alpha|^2)}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

と表される。従って, コヒーレント状態が第 n 励起状態を含む確率 $|P_n|$ は,

$$P_n = |\langle n|\alpha_{normal}\rangle|^2 = \frac{1}{\exp(|\alpha|^2)} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \quad \dots (18)$$

で与えられる。

(iv) 座標の期待値 $\langle \hat{x} \rangle$, 座標の二乗の期待値 $\langle \hat{x}^2 \rangle$ はそれぞれ,

$$\begin{aligned} \langle \hat{x} \rangle &= \langle \alpha^* | \hat{x} | \alpha \rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle = \left\langle \alpha^* \left| \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger + a) \right| \alpha \right\rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\alpha^* + \alpha), \end{aligned} \quad \dots (19)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^2 \rangle &= \langle \alpha^* | \hat{x}^2 | \alpha \rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle = \left\langle \alpha^* \left| \frac{\hbar}{2m\omega} (a^\dagger + a)^2 \right| \alpha \right\rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left\langle \alpha^* \left| \left\{ (a^\dagger)^2 + a^\dagger a + (1 + a^\dagger a) + a^2 \right\} \right| \alpha \right\rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} [(\alpha^*)^2 + 2|\alpha|^2 + \alpha^2 + 1] \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} [(\alpha^* + \alpha)^2 + 1] \end{aligned} \quad \dots (20)$$

と計算される。(20) の計算途中で交換関係 (4) を使った。これらより座標の不確定さ Δx の二乗は

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 &= \langle (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} [(\alpha^* + \alpha)^2 + 1] - \left[\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\alpha^* + \alpha) \right]^2 \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \end{aligned} \quad \dots (21)$$

と求められる。

(v) 前問 (d) と同様にして，運動量の期待値 $\langle \hat{p} \rangle$ ，運動量の二乗の期待値 $\langle \hat{p}^2 \rangle$ はそれぞれ，

$$\begin{aligned} \langle \hat{p} \rangle &= \langle \alpha^* | \hat{p} | \alpha \rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle = \left\langle \alpha^* \left| i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a^\dagger - a) \right| \alpha \right\rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle \\ &= i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\alpha^* - \alpha), \end{aligned} \quad \dots (22)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{p}^2 \rangle &= \langle \alpha^* | \hat{p}^2 | \alpha \rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle = \left\langle \alpha^* \left| -\frac{m\hbar\omega}{2} (a^\dagger - a)^2 \right| \alpha \right\rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle \\ &= -\frac{m\hbar\omega}{2} \left\langle \alpha^* \left| \left\{ (a^\dagger)^2 - a^\dagger a - (1 + a^\dagger a) + a^2 \right\} \right| \alpha \right\rangle / \langle \alpha^* | \alpha \rangle \\ &= -\frac{m\hbar\omega}{2} [(\alpha^*)^2 - 2|\alpha|^2 + \alpha^2 - 1] \\ &= \frac{m\hbar\omega}{2} [1 - (\alpha^* - \alpha)^2] \end{aligned} \quad \dots (23)$$

と計算される。これらより，運動量の不確定さ Δp の二乗は

$$\begin{aligned} (\Delta p)^2 &= \langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 \\ &= \frac{m\hbar\omega}{2} [1 - (\alpha^* - \alpha)^2] - \left[i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\alpha^* - \alpha) \right]^2 \\ &= \frac{m\hbar\omega}{2} \end{aligned} \quad \dots (24)$$

と求められる。以上より，不確定性関係は

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{4} \iff \Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \quad \dots (25)$$

となり，コヒーレント状態は，座標とその正準共役な運動量とについて，両者の不確定性の積を最小にする状態であることが判る。(つまり古典的描像に最も近い。)

問題 2 解答

+x 方向を向く要素の個数を N_+ , -x 方向を向く要素の個数を N_- とする。

$$N = N_+ + N_-, \quad x_N = b(N_+ - N_-) \quad \dots (1)$$

$$\text{より } N_+ = \frac{bN + x_N}{2b} = \frac{N}{2} \left(1 + \frac{x_N}{L} \right), \quad N_- = \frac{bN - x_N}{2b} = \frac{N}{2} \left(1 - \frac{x_N}{L} \right) \quad \dots (2)$$

1. $E = 0$ の場合

(i) $N, |x_N|/b \gg 1$ より $N_+, N_- \gg 1$ として Stirling の公式を用いると

$$S = k_B \log W, \quad W = \frac{N!}{N_+! N_-!} \quad \dots (3)$$

$$\begin{aligned} S &= k_B (\log N! - \log N_+! - \log N_-!) \\ &\approx k_B (N \log N - N - N_+ \log N_+ + N_+ - N_- \log N_- + N_-) \\ &= k_B (N \log N - N_+ \log N_+ - N_- \log N_-) \\ &= k_B \left[N \log N - \frac{N}{2} \left(1 + \frac{x_N}{L} \right) \log \left\{ \frac{N}{2} \left(1 + \frac{x_N}{L} \right) \right\} - \frac{N}{2} \left(1 - \frac{x_N}{L} \right) \log \left\{ \frac{N}{2} \left(1 - \frac{x_N}{L} \right) \right\} \right] \\ &= k_B \left[N \log N - \frac{N}{2} \left(1 + \frac{x_N}{L} \right) \log \frac{N}{2} - \frac{N}{2} \left(1 + \frac{x_N}{L} \right) \log \left(1 + \frac{x_N}{L} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{N}{2} \left(1 - \frac{x_N}{L} \right) \log \frac{N}{2} - \frac{N}{2} \left(1 - \frac{x_N}{L} \right) \log \left(1 - \frac{x_N}{L} \right) \right] \\ &= k_B N \left[\log 2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x_N}{L} \right) \log \left(1 + \frac{x_N}{L} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x_N}{L} \right) \log \left(1 - \frac{x_N}{L} \right) \right] \quad \dots (4) \end{aligned}$$

(ii) $E = 0$ なので, 内部エネルギー U は分子の形状によらない。Helmholtz の自由エネルギー $F = U - TS$, $dF = -SdT + Xdx_N$ より外力 X を求めると次のようになる。

$$X = \left. \frac{\partial F}{\partial x_N} \right|_T = -T \left. \frac{\partial S}{\partial x_N} \right|_T \quad \dots (5)$$

$$\begin{aligned} &= k_B T N \left[\frac{1}{2L} \log \left(1 + \frac{x_N}{L} \right) + \frac{1}{2L} - \frac{1}{2L} \log \left(1 - \frac{x_N}{L} \right) - \frac{1}{2L} \right] \\ &= \frac{k_B T}{2b} \log \frac{1 + x_N/L}{1 - x_N/L} \quad \dots (6) \end{aligned}$$

(iii) $x_N/L \ll 1$ のとき

$$X = \frac{k_B T}{2b} \left[\log \left(1 + \frac{x_N}{L} \right) - \log \left(1 - \frac{x_N}{L} \right) \right] \approx \frac{k_B T}{2b} \left(\frac{x_N}{L} + \frac{x_N}{L} \right) = \frac{k_B T}{Nb^2} x_N \quad \dots (7)$$

関係式 (7) はこの分子が Hooke の法則 (外力 X が変位 x_N に比例する) に従うゴム状の弾性体であることを表している。

2. $E > 0$ の場合

(i) $x_i = bm_i$ とする。

$$\sum_{i=1}^N m_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i \mu_j = \sum_{i=1}^N (N+1-i)\mu_i \quad \dots (8)$$

より, エネルギーを $H(= U)$ として

$$-\beta H = \frac{bQE}{k_B T} \sum_{i=1}^N m_i = A \sum_{i=1}^N (N+1-i)\mu_i \quad \dots (9)$$

したがって, 分配関数 Z_N は

$$Z_N = \sum_{\mu_i = \pm 1} e^{-\beta H} \quad \dots (10)$$

$$= (e^{NA} + e^{-NA})(e^{(N-1)A} + e^{-(N-1)A}) \dots (e^A + e^{-A})$$

$$= \prod_{l=1}^N (e^{lA} + e^{-lA}) \quad \dots (11)$$

(ii) (11) より μ_i の平均値は

$$\langle \mu_i \rangle = \frac{e^{A(N+1-i)} - e^{-A(N+1-i)}}{e^{A(N+1-i)} + e^{-A(N+1-i)}} = \tanh A(N+1-i) \quad \dots (12)$$

となる。

(iii) $|x| \ll 1$ のとき, $\tanh x \approx x - x^3/3$ なので, 電場が十分小さい極限 $NA \ll 1$ で

$$\begin{aligned} \langle x_N \rangle &= b \left\langle \sum_{i=1}^N \mu_i \right\rangle = b \sum_{i=1}^N \langle \mu_i \rangle = b \sum_{i=1}^N \tanh A(N+1-i) \\ &\approx b \sum_{i=1}^N A(N+1-i) = \frac{1}{2} N(N+1)Ab = \frac{(N+1)b^2}{2k_B T} (NQE) \quad \dots (13) \end{aligned}$$

$$NQE \approx \frac{2k_B T}{Nb^2} \langle x_N \rangle \quad (N \gg 1) \quad \dots (14)$$

(14) の外力 NQE は微視的な力の合力である。一方, (7) の外力 X は, $dF = -SdT + Xdx_N$ で定まる巨視的な熱, 統計力学的力である。(7) と (14) を比較すると, 外力の総和 NQE は端点に働く $X = NQE/2$ の張力に相当することが分かる。1/2 の因子がついたのは, 始点に近い要素 i の電荷に働く力が, 実効的な張力 X にほとんど寄与しないためである。

補足 前問 1(c) $E = 0$ で, 一定の外力 X が端点に働いている場合, X 一定のカノニカル分布 (このとき, エネルギー $H(U)$ は一定なので考えなくて良い) により, 鎖状分子の長さ $\langle x_N \rangle$ を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} Z_N &= \sum_{x_N} W e^{\beta X x_N} \quad (W \text{ は端点位置が } x_N \text{ となる状態数}) \\ &= \sum_{\mu_i = \pm 1} \exp\left(\beta X b \sum_i \mu_i\right) = (e^{\beta X b} + e^{-\beta X b})^N = 2^N (\cosh \beta X b)^N \quad \dots (15) \end{aligned}$$

$$\langle x_N \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \log Z_N}{\partial X} = Nb \tanh(\beta X b) \approx \frac{Nb^2}{k_B T} X \quad \dots (16)$$

(16) の最後で $\beta X b \ll 1$ とした。これは 1(c) の $N \gg x_N/b$ に対応する。よって

$$X = \frac{k_B T}{Nb^2} \langle x_N \rangle \quad \dots (17)$$

となり, (7) と同じ結果が得られる。

問題 3 解答

真電荷と伝導電流のない等方一様な媒質を考えているので，Maxwell 方程式は次のようになる。

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0 \quad \dots (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \dots (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \dots (3)$$

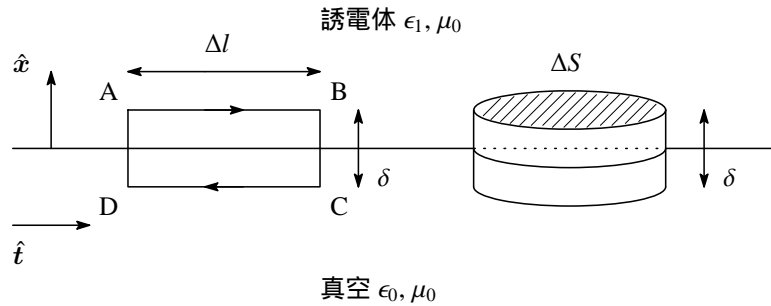
$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \frac{\partial (\epsilon \mathbf{E})}{\partial t} \quad \dots (4)$$

$$\text{誘電率} \quad \epsilon = \begin{cases} \epsilon_1 (> \epsilon_0) & \text{誘電体 } x > 0 \\ \epsilon_0 & \text{真空 } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{透磁率} \quad \mu = \mu_0$$

以下，真空 ($x < 0$) の電場，磁場を E_v, B_v ，誘電体 ($x > 0$) の電場，磁場を E_d, B_d で表す。

1. 図 1: 境界面 $x = 0$ における電磁場の接線成分 (左)，法線成分 (右) の連続性



(i) 境界面に平行な任意の単位ベクトルを \hat{t} とし， x 軸方向 (法線方向) の単位ベクトルを \hat{x} とする。図 1 (左) のような長方形の積分路 ABCD ($\overline{AB} = \Delta l, \overline{BC} = \delta$) をとり，これを縁とする平面 S 上で (3) の両辺を面積分する。

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \dots (5)$$

磁場 B は有限なので， $\delta \rightarrow 0$ とすると (右辺) $\rightarrow 0$ となる。(左辺) に Stokes の定理を適用すると

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} &= \oint_{ABCD} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} && \text{Stokes の定理} \\ &\rightarrow \int_{AB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{CD} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} && (\delta \rightarrow 0) \\ &= (E_{d,t} - E_{v,t})\Delta l = 0 \\ \therefore E_{v,t}(0, y, z, t) &= E_{d,t}(0, y, z, t) && (\Delta l \rightarrow 0) \quad \dots (6) \end{aligned}$$

(4) についても同様にして

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0) \\ \oint_{ABCD} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &\rightarrow (B_{d,t} - B_{v,t})\Delta l = 0 \quad \dots (7) \end{aligned}$$

次に，図 1 (右) のような底面積 ΔS ，高さ δ の円柱 V を考え，その表面を S とする。(1) の両辺を V で積分すると Gauss の定理より

$$\int_V \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) dV = \int_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{Gauss の定理} \quad \dots (8)$$

$$\rightarrow (\epsilon_1 E_{d,x} - \epsilon_0 E_{v,x}) \Delta S = 0 \quad (\delta \rightarrow 0)$$

$$\therefore \epsilon_0 E_{v,x}(0, y, z, t) = \epsilon_1 E_{d,x}(0, y, z, t) \quad (\Delta S \rightarrow 0) \quad \dots (9)$$

以上 (6) , (9) , (7) より境界 $x = 0$ において , (10) , (11) , (12) がそれぞれ成り立つ。

$$E_{0,t}(0, y, z, t) + E_{2,t}(0, y, z, t) = E_{1,t}(0, y, z, t) \quad \dots (10)$$

$$\epsilon_0 [E_{0,x}(0, y, z, t) + E_{2,x}(0, y, z, t)] = \epsilon_1 E_{1,x}(0, y, z, t) \quad \dots (11)$$

$$B_{0,t}(0, y, z, t) + B_{2,t}(0, y, z, t) = B_{1,t}(0, y, z, t) \quad \dots (12)$$

(ii)

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad \dots (13)$$

(13) を (8)~(9) と同様にして V で積分すると

$$\epsilon_0 E_{1,x}(0, y, z, t) - \epsilon_0 [E_{0,x}(0, y, z, t) + E_{2,x}(0, y, z, t)] = \sigma(y, z, t) \quad \dots (14)$$

境界条件 (11) より

$$\sigma(y, z, t) = (\epsilon_0 - \epsilon_1) E_{1,x}(0, y, z, t) \quad \dots (15)$$

2. 各波数成分について独立に Maxwell 方程式は成り立つ。真空中 $x < 0$ では

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad \dots (16)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \omega \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega), \quad \mathbf{k} \times \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = -\epsilon_0 \mu_0 \omega \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \quad \dots (17)$$

となる。

(i) $k_0 \mathbf{n}_0$ 成分 (\mathbf{E}_0) について考えると (17) より

$$k_0 \mathbf{n}_0 \times (k_0 \mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_0) = -\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \mathbf{E}_0 \quad \dots (18)$$

$$(k_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{E}_0) k_0 \mathbf{n}_0 - (k_0 \mathbf{n}_0 \cdot k_0 \mathbf{n}_0) \mathbf{E}_0 = -\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \mathbf{E}_0 \quad \dots (19)$$

(19) の (左辺) 第 1 項は (16) より 0 なので

$$k_0^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \quad \therefore k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \quad \dots (20)$$

(ii) (17) , (20) より

$$\mathbf{E}_0 = \frac{-k_0 B_0}{\epsilon_0 \mu_0 \omega} \mathbf{n}_0 \times \hat{z} = \frac{\omega B_0}{k_0} \hat{z} \times \mathbf{n}_0 \quad \dots (21)$$

3. 屈折波と反射波の電場振幅 \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 についても (21) と同様にして

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\omega B_1}{k_1} \hat{z} \times \mathbf{n}_1, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\omega B_2}{k_0} \hat{z} \times \mathbf{n}_2 \quad \dots (22)$$

が成り立つ。

(i) (12) より

$$B_0 \exp [i(k_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)] + B_2 \exp [i(k_0 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)] = B_1 \exp [i(k_1 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad \dots (23)$$

これが任意の y, z, t で成り立つためには

$$k_0 n_{0,y} = k_0 n_{2,y} = k_1 n_{1,y} \quad \Rightarrow \quad k_0 \sin \theta_0 = k_1 \sin \theta_1 \quad \dots (24)$$

(ii)

$$(23), (24) \text{ より} \quad B_0 + B_2 = B_1 \quad \dots (25)$$

$$(10), (22), (24) \text{ より} \quad \frac{\omega B_0}{k_0} \cos \theta_0 - \frac{\omega B_2}{k_0} \cos \theta_0 = \frac{\omega B_1}{k_1} \cos \theta_1 \quad \dots (26)$$

(25), (26) を解いて

$$B_1 = \frac{2k_1 \cos \theta_0}{k_1 \cos \theta_0 + k_0 \cos \theta_1} B_0, \quad B_2 = \frac{k_1 \cos \theta_0 - k_0 \cos \theta_1}{k_1 \cos \theta_0 + k_0 \cos \theta_1} B_0 \quad \dots (27)$$

(iii) $\theta_0 + \theta_1 = \pi/2$ のとき, $\sin \theta_0 = \cos \theta_1$, $\sin \theta_1 = \cos \theta_0$ が成り立つ。(24) を用いると (27) は

$$\frac{B_1}{B_0} = \frac{2 \cos \theta_0 \sin \theta_0}{\cos \theta_0 \sin \theta_0 + \sin \theta_1 \cos \theta_1} = 1 \quad (\because \cos \theta_0 \sin \theta_0 = \sin \theta_1 \cos \theta_1) \quad \dots (28)$$

$$\frac{B_2}{B_0} = \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_0 - \sin \theta_1 \cos \theta_1}{\sin \theta_0 \cos \theta_0 + \sin \theta_1 \cos \theta_1} = 0 \quad \dots (29)$$

となる。また, 電場振幅は (21), (22) より

$$\frac{k_1 E_1}{k_0 E_0} = \frac{B_1}{B_0} = 1, \quad \frac{E_2}{E_0} = \frac{B_2}{B_0} = 0 \quad \dots (30)$$

となる。したがって, 磁場が入射面 (xy 平面) に垂直に偏光している場合 (このとき電場は入射面と平行), $\theta_0 + \theta_1 = \pi/2$ で反射がなくなる。このときの入射角 $\theta_0 = \theta_B$ (Brewster 角)。

問題 4 解答

1. 重力エネルギーの原点を O とする。 (z, θ) を xyz 座標で表すと $\begin{pmatrix} z \tan \alpha \cos \theta \\ z \tan \alpha \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$ なので、速度は

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \tan \alpha \cos \theta - z \dot{\theta} \tan \alpha \sin \theta \\ \dot{z} \tan \alpha \sin \theta + z \dot{\theta} \tan \alpha \cos \theta \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \text{ その大きさは}$$

$$v^2 = (\dot{z} \tan \alpha)^2 + (z \dot{\theta} \tan \alpha)^2 + \dot{z}^2$$

である。これより、求めるラグランジアン \mathcal{L} は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left[(\dot{z}^2 + z^2 \dot{\theta}^2) \tan^2 \alpha + \dot{z}^2 \right] - mgz \quad \dots (1)$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{z}^2}{\cos^2 \alpha} + z^2 \dot{\theta}^2 \tan^2 \alpha \right) - mgz. \quad \dots (2)$$

2. θ は循環座標であるから $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$ が保存し、また \mathcal{L} の式は t を含まないので全エネルギーも保存する。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = mz^2 \dot{\theta} \tan^2 \alpha$$

よって、 $z^2 \dot{\theta}$ 及び全エネルギー E が保存する。

- 3.

$$z^2 \dot{\theta} = 4h^2 \cdot \frac{v_0}{2h \tan \alpha} = \frac{2hv_0}{\tan \alpha}. \quad \dots (3)$$

またエネルギーは、

$$E = \frac{1}{2} m \left[(\dot{z}^2 + z^2 \dot{\theta}^2) \tan^2 \alpha + \dot{z}^2 \right] + mgz \quad \dots (4)$$

$$= \frac{1}{2} m \left[4h^2 \cdot \left(\frac{v_0}{2h \tan \alpha} \right)^2 \tan^2 \alpha \right] + mg \cdot 2h \quad \dots (5)$$

$$= \frac{1}{2} mv_0^2 + 2mgh \quad \dots (6)$$

(3) 式を代入して整理すると、

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} \dot{z}^2 + (2hv_0)^2 \frac{1}{z^2} + 2gz = v_0^2 + 4gh, \quad \dots (7)$$

$$\frac{dt}{dz} = \dots = \pm \sqrt{\frac{-2g \cos^2 \alpha}{z^2} (z - 2h) \left(z^2 - \frac{v_0^2}{2g} z - \frac{hv_0^2}{g} \right)} \quad \dots (8)$$

また (7) 式を時間微分すると、

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \left(4h^2 v_0^2 \frac{1}{z^3} - g \right) \cos^2 \alpha \quad \dots (9)$$

となることが分かる。これより、 $\frac{v_0^2}{2h} - g \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$ の時、開始状態から質点は $\begin{cases} \text{上} \\ \text{下} \end{cases}$ 向きに進み始める。

(i) $|v_0| > \sqrt{2hg}$ のとき

質点は上向きに進み始める。その後 $z = \left[\frac{(2hv_0)^2}{g} \right]^{\frac{1}{3}}$ の位置で $z = z(t)$ の函数は変曲点を迎え、 $z = \frac{v_0(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 16gh})}{4g}$ において $\frac{dz}{dt} = 0$ となって、再び z は減少し始める ($\frac{dz}{dt}$ の符号が + から - に変わる)。そしてまた $z = \left[\frac{(2hv_0)^2}{g} \right]^{\frac{1}{3}}$ で変曲点を迎え、 $z = 2h$ で $\frac{dz}{dt} = 0$ となって、再び z は増加し始め、これを繰り返す。つまり、

$$2h \leq z \leq \frac{v_0(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 16gh})}{4g}$$

で振動する。

(ii) $|v_0| = \sqrt{2hg}$ のとき … この時は $z = 2h$ で円軌道を保つ。

(iii) $|v_0| < \sqrt{2hg}$ のとき

質点は下向きに進み始め、 $z = \left[\frac{(2hv_0)^2}{g} \right]^{\frac{1}{3}}$ で変曲点を迎え、 $z = \frac{v_0(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 16gh})}{4g}$ で $\frac{dz}{dt} = 0$ となり … と同様に考えるが、 $z = h$ に底があるので少し注意が必要である。具体的には $z = \frac{v_0(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 16gh})}{4g}$ と $z = h$ の大小を見ればよい。

(i) $\sqrt{\frac{2hg}{3}} \leq |v_0| < \sqrt{2hg}$ のとき

このときは質点は底に触れることがなく (等号のときは、触れても影響を受けない)

$$\frac{v_0(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 16gh})}{4g} \leq z \leq 2h$$

で滑らかに振動する。

(ii) $|v_0| < \sqrt{\frac{2hg}{3}}$ のとき

このときは $z = h$ で下向きの速度を持っているので、開口から落下してしまう。

問題 5 解答

1. まず，重心系で



という反応を考察する。図 2 のように，反応前は，2 つの陽子が同じエネルギー E_p' で反対向き（互いに近づく向き）に運動する。そして E_p' がしきい値をとるとき，反応後は 3 粒子が静止する。

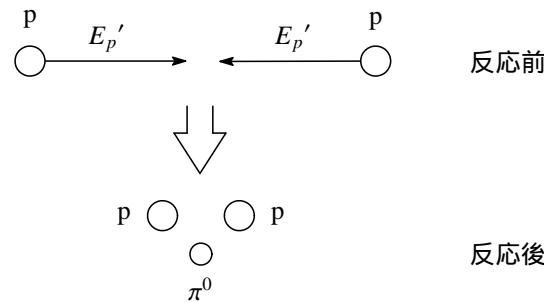


図 2: 重心系から見た，最低エネルギーでの π^0 生成反応

この場合についてエネルギー保存則を用いると，

$$\begin{aligned} 2E_p' &= 2m_p^2c^2 + m_\pi^2c^2 \\ \Rightarrow E_p' &= \frac{2m_p^2c^2 + m_\pi^2c^2}{2} \quad \dots (2) \end{aligned}$$

より，重心系で見たときの陽子のエネルギー E_p' のしきい値が求まった。

ところで，反応前の陽子の速さを v とし， $\beta = v/c$ ， $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ とするとき，

$$E_p' = m_p\gamma c^2 \quad \dots (3)$$

という関係式に (2) 式を代入して γ を求めることができる。

$$\gamma = \frac{E_p'}{m_p c^2} = \frac{2m_p^2c^2 + m_\pi^2c^2}{2m_p c^2} \quad \dots (4)$$

次に，反応を実験室系で考察する。反応後の 3 粒子の実験室系での速さを v とするとき， $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ は，(4) 式で求めた γ に等しい。このことに注意し，実験室系においてエネルギー保存則を用いると，

$$\begin{aligned} T_p + 2m_p c^2 &= 2m_p \gamma c^2 + m_\pi \gamma c^2 \\ &= \frac{(2m_p + m_\pi)^2}{2m_p} c^2, \\ T_p &= \left(2m_\pi + \frac{m_\pi^2}{2m_p} \right) c^2 \\ &= \left(2 \times 135(\text{MeV}/c^2) + \frac{(135(\text{MeV}/c^2))^2}{2 \times 940(\text{MeV}/c^2)} \right) c^2 \\ &= 280 (\text{MeV}) \quad \dots (5) \end{aligned}$$

より求めるべきしきい値が求まった。

2.

- (i) まず, π^0 静止系で考える。崩壊において, π^0 の静止エネルギー $m_\pi c^2$ が 2 つの γ 線のエネルギー E_γ' になるので,

$$E_\gamma' = \frac{m_\pi c^2}{2} \quad \dots (6)$$

である。また, 運動量の大きさは,

$$p_\gamma' = \frac{E_\gamma'}{c} = \frac{m_\pi c}{2} \quad \dots (7)$$

である。

これらをローレンツ変換して実験室系でのエネルギー E_γ を求める。そのために, 実験室系の π^0 静止系に対する速度 β , γ を求めたい。 γ は, 実験室系で見たときの π^0 のエネルギーとの関係から次のように求まる。

$$E_\pi = m_\pi \gamma c^2 \Rightarrow \gamma = \frac{E_\pi}{m_\pi c^2} \quad \dots (8)$$

また, β は γ との関係から次のように求まる。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \beta = -\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = -\sqrt{1-\left(\frac{m_\pi c^2}{E_\pi}\right)^2} = -\sqrt{1-\left(\frac{m_\pi c^2}{E_\pi}\right)^2} \quad \dots (9)$$

(実験室系は重心系に対して, 入射 π^0 粒子の運動方向と逆方向に動いているので, β の符号はマイナスになっている。) 従ってローレンツ変換により, 実験室系でのエネルギーは

$$\begin{aligned} \frac{E_\gamma}{c} &= \gamma \left(\frac{E_\gamma'}{c} - \beta p_\gamma' \cos \theta^* \right) \\ &= \frac{E_\pi}{m_\pi c^2} \left(\frac{m_\pi c}{2} + \sqrt{1-\left(\frac{m_\pi c^2}{E_\pi}\right)^2} \frac{m_\pi c^2}{2c} \cos \theta^* \right) \\ &= \frac{E_\pi}{2c} \left(1 + \sqrt{1-\left(\frac{m_\pi c^2}{E_\pi}\right)^2} \cos \theta^* \right) \\ \Rightarrow E_\gamma &= \frac{E_\pi}{2} \left(1 + \sqrt{1-\left(\frac{m_\pi c^2}{E_\pi}\right)^2} \cos \theta^* \right) \quad \dots (10) \end{aligned}$$

となる。

次に, γ 線の微小エネルギー幅 dE_γ に対応する断面積を $d\sigma$ とおくと, 求めるスペクトルの縦軸にあたる量は $\frac{d\sigma}{dE_\gamma}$ であり, 次のようにして計算できる。

$$\frac{d\sigma}{dE_\gamma} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{d\Omega}{d\theta^*} \frac{d\theta^*}{dE_\gamma} \quad \dots (11)$$

ただし, $d\Omega$ は π^0 静止系で見たときの微小立体角である。まず, π^0 静止系においては γ 線の角分布は等方的であることから,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \text{Const} \quad \dots (12)$$

である。また, π^0 静止系において, π^0 の位置を中心とする半径 1 の球面のうち, $\theta^* \sim \theta^* + d\theta^*$ に対応する部分の面積は $2\pi \sin \theta^* d\theta^*$ であるから,

$$\frac{d\Omega}{d\theta^*} \propto \sin \theta^* \quad \dots (13)$$

である。そして, (10) 式より,

$$\frac{d\theta^*}{dE_\gamma} = \frac{1}{\frac{dE_\gamma}{d\theta^*}} \propto \frac{1}{\sin \theta^*} \quad \dots (14)$$

である。従って, (12) 式, (13) 式, (14) 式より,

$$\frac{d\sigma}{dE_\gamma} = \text{Const}' \quad \dots (15)$$

となり, E_γ の分布が一様であることが示された。

(ii) 図 3 のように x, y 方向及び角度 θ_1, θ_2 を定義する。(6) 式, (7) 式, (8) 式, (9) 式を用いて, ローレンツ

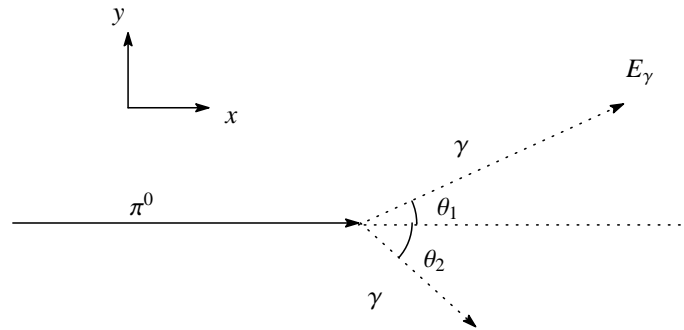


図 3: 実験室系での π^0 崩壊反応

変換により, 実験室系での γ の運動量の x 方向成分を求めると,

$$\begin{aligned} p_x &= \gamma \left(p' \cos \theta^* - \beta \frac{E_\gamma'}{c} \right) \\ &= \frac{E_\pi}{m_\pi c^2} \left(\frac{m_\pi c}{2} \cos \theta^* + \sqrt{1 - \left(\frac{m_\pi c^2}{E_\pi} \right)^2} \frac{m_\pi c}{2} \right) \\ &= \frac{E_\pi}{2c} \left(\cos \theta^* + \sqrt{1 - \left(\frac{m_\pi c^2}{E_\pi} \right)^2} \right) \\ &\simeq \frac{E_\pi}{2c} (1 + \cos \theta^*) \end{aligned} \quad \dots (16)$$

ただし, π^0 のエネルギー $E_\pi = 30$ (GeV) は, π^0 の静止エネルギー $m_\pi c^2 = 135$ (MeV) と比較して十分大きいと近似した。一方, y 方向の運動量については, ローレンツ変換の影響を受けないので,

$$p_y = \frac{m_\pi c}{2} \sin \theta^* \quad \dots (17)$$

である。このことから, 実験室系での角度 θ_1 を求めると,

$$\tan \theta_1 = \frac{p_y}{p_x} = \frac{\frac{m_\pi c}{2} \sin \theta^*}{\frac{E_\pi}{2c} (1 + \cos \theta^*)} = \frac{m_\pi c^2}{E_\gamma} \frac{\sin \theta^*}{1 + \cos \theta^*} \quad \dots (18)$$

である。ただし, 前述のように $m_\pi c^2 \ll E_\pi$ であるから, 少なくとも 2 光子の成す角を最小値にするような θ^* に対しては, $\tan \theta_1$ の値は非常に小さく,

$$\theta_1 \simeq \tan \theta_1 = \frac{m_\pi c^2}{E_\gamma} \frac{\sin \theta^*}{1 + \cos \theta^*} \quad \dots (19)$$

と近似できる。同様にしてもう一方の γ の角度 θ_2 についても求めると,

$$\theta_2 \simeq \frac{m_\pi c^2}{E_\gamma} \frac{\sin \theta^*}{1 - \cos \theta^*} \quad \dots (20)$$

となる。2光子の成す角は、(19)式+(20)式、で計算できて、

$$\begin{aligned}\theta_1 + \theta_2 &= \frac{m_\pi c^2}{E_\gamma} \left(\frac{\sin \theta^*}{1 + \cos \theta^*} + \frac{\sin \theta^*}{1 - \cos \theta^*} \right) \\ &= \frac{m_\pi c^2}{E_\gamma} \frac{2}{\sin \theta^*} \quad \dots (21)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\geq \frac{2m_\pi c^2}{E_\gamma} \quad (\text{等号成立は}\theta^* = \frac{\pi}{2}\text{の時}) \\ &= \frac{2 \times 135 \text{ (MeV)}}{30 \text{ (GeV)}} \\ &= 9.0 \times 10^{-3} \text{ (rad)} \quad \dots (22)\end{aligned}$$

より、2光子間の角度の最小値が求まった。

- (iii) $m_\pi c^2 \ll E_\pi$ が成り立ち、かつ放出角が $\theta^* = 0, \pi$ 付近以外の値をとる場合について考える。このとき2光子間の角度は(21)式、のようになり、最小値と同程度のオーダーの非常に小さい値になる。 π^0 静止系においては γ 線の角分布は等方的であるから、これは、放出角が $\theta^* = 0, \pi$ 付近の値をとる場合を除く大部分の崩壊に対して、2光子間の角度がほぼ最小値に等しくなることを意味している。従って、角度分布は最小値付近に鋭いピークをもつ。

3.

- (i) π^- がパイ中間子原子の基底状態に落ちてから反応が起こることから、 π^- と d の間の軌道角運動量の大きさは0である。また、問題文にあるとおり、 π^- のスピンの大きさは0である。そして、重陽子が 3S_1 の束縛状態にあることから、重陽子のスピンの大きさ(陽子と中性子からなる系の全角運動量)は1である。以上の角運動量を全て合成すると、始状態の全角運動量の大きさは1であることがわかる。次にパリティを求める。一般に、 n 粒子から成る系のパリティ P は、それらの粒子間の相対運動の軌道角運動量の大きさを l_1, l_2, \dots, l_N (粒子数 n のとき、独立な軌道角運動量の数 N は、 $N = n - 1$) とし、それぞれの粒子のパリティを P_1, P_2, \dots, P_n とすると、

$$P = (-1)^{l_1 + l_2 + \dots + l_N} P_1 P_2 \dots P_n \quad \dots (23)$$

で表せる。

重陽子が 3S_1 の束縛状態にあることから陽子と中性子の間の軌道角運動量の大きさは0である。そして、陽子と中性子のパリティは等しいことから、重陽子のパリティは

$$P_d = (-1)^0 P_p P_n = 1 \quad \dots (24)$$

である。一方、前述のように、 π^- と d の間の軌道角運動量の大きさは0であるから、系全体のパリティは、

$$P = (-1)^0 P_d P_\pi = P_\pi \quad \dots (25)$$

である。

- (ii) まず、終状態の全スピンの大きさを1のときを考える。全スピンの大きさが1のとき、波動関数のスピン部分は粒子の入れ替えに関して対称である。一方、中性子がフェルミオンであることから、(スピン部分も含めた)波動関数が粒子の入れ替えに関して反対称である。従って、波動関数の空間部分は粒子の入れ替えに関して反対称でなければならない。そして、波動関数の空間部分が粒子の入れ替えに関して反対称なら、軌道角運動量の大きさは奇数である。以上より、終状態の全スピンの大きさが1のとき軌道角運動量の大きさは奇数である。

一方，終状態の全スピンの大きさが 0 のとき，波動関数のスピン部分が粒子の入れ替えに関して反対称であることから，同様の議論により，軌道角運動量の大きさは偶数であることがわかる。

- (iii) 全角運動量が保存されることから，終状態の全角運動量は 1 である。ここで，もし全スピンの大きさが 0 だとすると，全角運動量の大きさは軌道角運動量の大きさに一致する。ところが，(b) の結果より，全スピンの大きさが 0 のとき軌道角運動量は偶数でなければならないので，全角運動量は 1 になりえない。従って，全スピンの大きさは 1 であり，軌道角運動量は奇数である。ところで，軌道角運動量の大きさを L とすると，全スピンの大きさが 1 であることから，全角運動量の大きさは $L-1, L, L+1$ のいずれかになる。従って，全角運動量が 1 になるためには，軌道角運動量の大きさも 1 でなくてはならない。以上より，可能な組み合わせは $S = 1, L = 1$ のみである。

- (iv) 軌道角運動量の大きさが 1 であることから，終状態のパリティは

$$P = (-1)^1 P_n P_n = -1 \quad \dots (26)$$

である。この問題で考察している反応は，強い相互作用による反応であるから，反応の前後でパリティは保存する。(弱い相互作用による反応ではパリティが保存しないことがある。) 従って，(25) 式，と (26) 式を等しいとおいて，

$$P_\pi = -1 \quad \dots (27)$$

より π^- のパリティが決定された。

問題 6 解答

1.

- (i) 一般に $pV = nRT$ という関係により気体の圧力, 体積, モル数 (即ち分子数) 温度は関係付けられている。ここで題意より常圧, 0°C における気体分子数の関係式が与えられているから, これを用いて 0°C , $1.0 \times 10^{-5}\text{Pa}$ における 1.0cm^3 中の気体分子の総数は,

$$\frac{6.0 \times 10^{23} \times 1.0 \times 10^{-5} \times 1.0}{1.0 \times 10^5 \times 22 \times 10^3} = 2.73 \times 10^9$$

より, 2.73×10^9 個と求まった。

- (ii) 電離断面積と, 分子の総数及び電子の総数の積が全電離分子数を与える。このことより, (a) の結果と, 題に与えられている結果を用いて,

$$\frac{1.0 \times 10^{-3}}{1.6 \times 10^{-19}} \times 3.0 \times 10^{-16} \times 2.73 \times 10^9 = 5.12 \times 10^9$$

となることから, 答えは毎秒 5.12×10^9 個と求まった。

2.

- (i) フィラメントに電流を流すことにより, フィラメントは熱せられ, その表面から熱電子を発生させる。その熱電子を, フィラメントグリッド間に電圧をかけ, 加速してやる。すると, その事により, 熱電子は気体分子に衝突し, 陽イオンを発生させる。ここで発生した陽イオンは陽極となるコレクターに細くされ, 電流となって観測される。この時, フィラメント-グリッド間に流れる電子電流と, フィラメント-コレクター間に流れるイオン電流の間には単純な比例関係が成り立ち, また同様にイオン電流は真空計内部の圧力に比例する。これらのことより, 電子電流を一定に保って測定を実施すれば, イオン電流を測定することは即ち圧力を測定することにつながり, この事を利用して真空計の圧力を測定するのである。
- (ii) イオン電流の値はその気体の衝突断面積に左右される, 衝突断面積は電子の運動エネルギーと気体の種類に依存するが, 一義的には気体分子の大きさによって考えてよい。特にそれは希ガス元素の場合その反応性の乏しさから逆に顕著であると考えてよい。このことは大きな分子ほど衝突断面積が大きくなると考えてよく, これにより分子量が増えるほどイオン電流が大きくなることが予想でき, 実際にそうになっていることが確かめられている。
- (iii) グリッドに衝突する際, 制動放射により放出される X 線はコレクターに到達した後に光電効果を起こしてコレクターの表面から電子を飛び出させる。このことが系に余計な電流を流すこととなり, 誤差の原因となっている。このような誤差を小さくするにはコレクターの材質として電子を飛び出させるための仕事関数を出来るだけ大きくするようなものを選べばよい。その事により, 光電効果により発生する電子の量を抑えることが出来, 高真空度までの測定が可能となるのである。
3. 電離真空計が使えないような高い圧力で使用できる圧力計としては, ピラニゲージがある。ピラニゲージの測定子は金属フィラメントであり, 電流が流されて加熱されている。気体分子の衝突によって熱エネルギーが運び去られるが, 圧力が高いほど失う熱エネルギーが多く, フィラメントの温度が下がる。温度の低下によって電気抵抗が下がるので, この変化を測定することで圧力を知ることができる。

問題 7 解答

1. よりよい運動量分解能を得るには、観測点 3 点により作られる三角形の外接円の半径を精度良く観測できればよく、これは作られる三角形を大きくすれば誤差が相対的に小さくなり達成することができる。この前提をもとに諸パラメータの大きさをどのようにすればよいかを以下論ずることとする。

- 位置分解能 σ について：

これは明らかに、三角形の大きさを正確に決めるには小さい方が良く議論するまでも無い。

- B, L, p について：

三角形の辺の長さが大きくなる時の条件として L が大きく、サジッタ S が大きいほうが良いと思われる。そのため $R \gg L$ の時には R が小さいほうが良いことになり、

$$R = \frac{p}{0.3B} \quad \dots (1)$$

より B は大きくしたほうが良く、 p が小さいときのほうが精度良く測定することができる。

2.

- (i) 図より $S = R - R \cos \theta$, $\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{R} \right)^2$ 。以上より

$$S = \frac{L^2}{2R} = 0.15 \frac{BL^2}{p} \quad \dots (2)$$

- (ii) (a) より $p = 0.15 \times \frac{BL^2}{S}$ 。よって

$$\delta p = 0.15 \times \frac{BL^2}{S^2} \delta S = \frac{p^2}{0.15 \times BL^2} \delta S \quad \dots (3)$$

- (iii) $\delta S = x_2 - x_1$ 。よって

$$\delta S = \sqrt{\sigma^2 + \sigma^2} = \sqrt{2}\sigma \quad \dots (4)$$

- (iv) $\frac{\delta p}{p} = \frac{\sqrt{2}\sigma p}{0.15BL^2}$

3. これまで論じてきた測定計画を忠実に再現できれば、上に述べた測定精度で測定することができるが、実際にはこの実験を阻害する要因がある。

次にその改善策を示していきたいと思う。(ただしここでは粒子の種類と同定などの機構については考えず、 p を精度良く測定することについて論ずることとする。)

この実験では (1) 式が成り立つという仮定のもとに考えており、換言すれば粒子がこの式に従って運動すれば理想通りに行くものと思われる。そのためには

- 測定器 1 ~ 3 の間では運動量一定
- 測定器のなかでは磁場一定で電場は存在しない (ドリフトを起こさせないため)

の二つの条件を満たすようにすることが重要になり、

- 装置内は十分な真空度を保つ
- 乾板を薄くする
- 磁場の大きさが変化しない程度に装置を小さくするか、磁場を一様に保つ工夫を考える

といったことに留意すべきであると思われる。

問題 8 解答

1.

(i)

$$\begin{cases} \phi(x) = e^{ikx} + Ae^{-ikx} \\ \phi(x) = Be^{\rho x} + Ce^{-\rho x} \\ \phi(x) = De^{ikx} \end{cases} \quad \dots (1)$$

と表せる。ここで

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \rho = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

である。

(ii) $x = 0$ で対数微分すると,

$$k \frac{1-A}{1+A} = \rho \frac{B-C}{B+C} \quad \dots (2)$$

 $x = L$ で対数微分すると,

$$\rho \frac{Be^{\rho L} + Ce^{-\rho L}}{Be^{\rho L} - Ce^{-\rho L}} = ik \quad \dots (3)$$

以上が満たすべき境界条件である。

(iii) 与えられた透過率を改めて T_T とおき³, 右側に透過する Flux を j_{trans} とすると

$$j_{\text{trans}} = \frac{\hbar k}{m} |D|^2 = \frac{\hbar k}{m} T_T = \sqrt{\frac{2E}{m}} T_T$$

電子の密度は n なので, 全電流は

$$j = -e \sqrt{\frac{2E}{m}} n T_T(E) \quad \dots (4)$$

2.

(i) 1次元自由電子気体の単位長さ当たりの状態密度は, スピンを考慮すると

$$\begin{aligned} \frac{dp}{h} &= 2 \cdot \frac{1}{h} \sqrt{\frac{m}{2E}} dE = D(E) dE \\ \therefore D(E) &= \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2m}{E}} \quad \dots (5) \end{aligned}$$

絶対零度では電子は縮退しているので

$$N = \int_0^{\infty} D(E) f(E) dE = \int_0^{E_F} D(E) dE = \frac{2\sqrt{2mE_F}}{h}$$

よって Fermi 速度は

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}} = \frac{Nh}{2m} \quad \dots (6)$$

³設問 2 (b) での温度 T と紛らわしいため。

- (ii) この系が、電圧差を一定に保たれた定常状態にあることに注意する。式 (4) より、エネルギー E を持つ $f_L(E)D(E)dE$ の電子が左の系から右の系に定常的に流れ込むが、そのうち $f_R(E)$ の割合で、左にいた電子は右にいた電子を押し出すだけである。ゆえに、

$$J_{LR} = -e \int_0^\infty \sqrt{\frac{2E}{m}} D(E) f_L(E) [1 - f_R(E)] T(E) dE \quad \dots (7)$$

同様の流れが右から左に向かっても存在するので、

$$J_{RL} = -e \int_0^\infty \sqrt{\frac{2E}{m}} D(E) f_R(E) [1 - f_L(E)] T(E) dE \quad \dots (8)$$

- (iii)

$$\begin{aligned} \Delta J &= -e \int_0^\infty \sqrt{\frac{2E}{m}} D(E) [f_L(E) - f_R(E)] T(E) dE \\ &= -e \int_{E_{FR}}^{E_{FL}} \sqrt{\frac{2E}{m}} D(E) T(E) dE \\ &= -e \int_{E_{FR}}^{E_{FL}} \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2m}{E}} T(E) dE \\ &= -\frac{2e}{h} \int_{E_{FR}}^{E_{FL}} T(E) dE \\ &\approx -\frac{2e}{h} T(E_{FL}) \Delta\mu \\ &= -\frac{2e}{h} T(E_{FL}) (-e\Delta V) \quad \dots (9) \end{aligned}$$

よって

$$G = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta J}{\Delta V} = \left(\frac{2e^2}{h} \right) T(E_{FL}) \quad \dots (10)$$

3.

- Fe は強磁性を持ち磁石にくっつくが、n 形 Si はくっつかない。(30 字)
- Fe は温度上昇とともに抵抗が増大するが、n 形 Si はキャリアーが増すため減少する。(40 字)

など。

問題 9 解答

1.

- (i) イオンが平衡電位を達成しているときは、自由エネルギー変化はどちらへのイオンの移動に対しても 0 でなければならない。よって

$$zFV = 2.3RT \log_{10} (C_o/C_i)$$

これから

$$V = 2.3 \frac{RT}{zF} \log_{10} (C_o/C_i)$$

が導かれる。尚、実はこれは $V = \frac{RT}{zF} \ln (C_o/C_i)$ と書き直せる。

- (ii) 静止状態での細胞膜は主に K^+ を透過させることが知られている。ここで、細胞内と細胞外での K^+ の濃度の差から、膜電位を求めよう。

$$zFV = 2.3RT \log_{10} (C_o/C_i)$$

を使えば

$$1 \times 23 [\text{kcal/V} \cdot \text{mol}] \times V [\text{V}] = 2.3 \times 2.0 \times 10^{-3} [\text{kcal/K} \cdot \text{mol}] \times 293 [\text{K}] \log_{10} \left(\frac{20 [\text{millimol}/\ell]}{400 [\text{millimol}/\ell]} \right)$$

これより $V = 0.1 \times 2 \times 0.001 \times 293 \times \log [1/20] = -0.0762$, よって $V_{K^+} = -76 [\text{mV}]$ 。

- (iii) 静止状態での神経細胞細胞膜は前問で述べたように主に K^+ を透過させ、更に Na^+K^+ channel によって細胞内の Na^+ 濃度を低く保つことによって結果的に細胞内静止電位を K^+ の平衡電位にほぼ等しい $-70 [\text{mV}]$ 付近に保っている。しかし、活動電位の発生時においては次のような変化がおきる。

活動電位とは、脱分極の閾値を越えた電位であるが、細胞膜が閾値を越えて脱分極すると、活動電位が発生する。その際、まず、脱分極地点の電位依存性 Na^+ チャンネルが開き、細胞膜の Na^+ 透過性が激増する。これにより、電位の勾配により Na^+ の細胞内への流入が起こり、それが周辺に脱分極を引き起こす。

しかしこの脱分極も次の変化が引き続いて起こることにより終焉する。まず、電位依存性 K^+ チャンネルが開くことにより K^+ の細胞外への流出が起こる。このことを再分極というが、これにより細胞内の電位が低下し、電位依存性の K^+ , Na^+ チャンネルは両方とも閉じる。これらの変化は僅か $1 [\text{msec}]$ 程度で終了する。

- (iv) 神経インパルスが周辺部に広がっていく過程は上の問題で述べた。さて、ここではその伝達が一方である理由を述べよう。

神経インパルスが伝達する際、細胞膜は脱分極、再分極を経てもとの状態に戻るが、膜が次の活動電位を発生させる状態になるには脱分極、再分極を経るだけの時間が必要となる。膜が次の活動電位を発生させる状態になる前の状態を不活性状態と呼ぶ。

このことにより、今まさに脱分極が起こっている部位は片方向にしかその神経インパルスを伝達できないのである。なぜならほんの少し前に脱分極が起こっていた側は不活性状態になっているので脱分極が引き起こされないからである。

2.

- (i) *eyeless* 遺伝子が目の形成に必要なことは問題文で与えられたように示すことができる。しかしこれが目の形成に十分であることはどのように示したらよいだろうか。

そのためにはこの遺伝子だけにより、本来目が形成されない所にも複眼が形成されることを示せばよいだろう。

具体的には次のようにすればよい。任意のプロモーターにより発現可能な GAL4 を持つ個体と、UAS 配列 (GAL4 にのみ反応し、活性化する領域) にコントロールされる *eyeless* をもつ個体を交配させ、結果として、GAL4 のプロモーターに対応した転写活性化因子により *eyeless* が発現する仕組みを持つ子供ができる。その転写活性化因子が存在する場所で眼がつくられることが示されれば良い。

余談ではあるが、このことは実際に示されている。

註： 実際には GAL4 などの知識は要求されないと考えられる。「本来は目が形成されない所を形作ることになる DNA の部位 (正確には成虫原基) に *eyeless* 遺伝子を挿入することによって複眼が形成される」旨を書けば良い。

- (ii) 複眼のような複雑な組織を形成するのに、高々ひとつの遺伝子が作る蛋白質のみで対応できるとは考えにくい。また、この遺伝子が転写因子 (あるプロモータを活性化させる分子) をコードしていることから、この *eyeless* 遺伝子は複眼を形成するための様々な遺伝子の転写活性をも活性化させるのであると考えられる。つまり、*eyeless* 遺伝子は複眼形成のためのマスター遺伝子であると考えられる。