2002年度　入学試験 一般教育科目（英語なし）

■ 問題1

定数ベクトル $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を用いた微分方程式

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = \vec{v} \times \vec{x}$$

を考える。

1. 上の方程式に A を用いて

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = A \bullet \vec{x}$$

   という形に書き換える。行列 A を求めよ。

2. 次の性質を持つ正規直行基底 $\vec{e_i}(i = 1, 2, 3)(\vec{e_i} \bullet \vec{e_j} = \delta_i j)$ と係数 $\lambda(\lambda > 0)$ を求めよ。

$$\vec{v} \times \vec{e_1} = \lambda\vec{e_2}, \qquad \vec{v} \times \vec{e_2} = -\lambda\vec{e_1}, \qquad \vec{v} \times \vec{e_3} = 0$$

3. 上で得られた結果を用いると、行列 A は実直行行列 U を用いて

$$A = U \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^t, \qquad UU^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   とかけることを示せ (ただし U^t は U の転地行列)。また U 求めよ。

4. $\vec{x}$ を基底 $\vec{e_i}$ を用いて

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} q_i(t)\vec{e_i}$$

   と展開する。係数 $q_i(t)$ に対する微分方程式に書き下し、その一般解を求めよ。また解の振る舞いを定性的に論じよ。

■ 問題 2

球対称の関数 $u(t,r)$ に対する波動方程式は、以下のように書くことができる:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

ここで、r は動径座標、t は時間座標、c は速度の次元の定数である。以下の問に答えよ。

1. 上の偏微分方程式の一般解を求めよ。なおここで一般解とは 2 個の任意関数で表された解を指す。

2. 初期条件、$t = 0$ で $u = e^{-r^2/(2r_0^2)}$、$\partial u/\partial t = 0$ の場合の $t > 0$ に対する解を求めよ。ただし、r_0 は波束の広がりをあらわす実定数である。

3. 初期条件、$t = 0$ で $u = 0$、$\partial u/\partial t = e^{-r^2/(2r_0^2)}$ の場合の $t > 0$ に対する解を求めよ。

4. 3 で求めた関数を、時間に対してフーリエ変換せよ。ただしここでフーリエ変換は、

$$U(\omega, r) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t,r)e^{i\omega t}dt$$

と定義する。

5. $g(\omega) \equiv U(\omega, r = 0)$ は、ω の関数である。$g(\omega)$ が最大値となる ω の値を求めよ。

■ 問題 1 解答

1. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると、$\vec{v}$ と $\vec{x}$ の外積は、

$\vec{v} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ -2x_3 - x_1 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$

よって、

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = \vec{v} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A\vec{x}$$

ゆえに求める行列は、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

2. $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}, (a^2 + b^2 = 1)$ とおくと、

$\vec{v} \times \vec{e_1} = \begin{pmatrix} a + b \\ -2b \\ 2a \end{pmatrix} = \lambda \vec{e_2}$

この関係式を、$\vec{v} \times \vec{e_2} = -\lambda \vec{e_1}$ に代入すると、

$\vec{v} \times \lambda \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 2a - 2b \\ -5a - b \\ -a - 5b \end{pmatrix}, \qquad -\lambda^2 \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda^2 a \\ -\lambda^2 b \end{pmatrix}$

これより、

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad b = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \lambda = \sqrt{6}$$

ゆえに、

$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \qquad \vec{e_3} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

3. $\vec{x} = q_1\vec{e_1} + q_2\vec{e_2} + q_3\vec{e_3}$ とおくと、(2) より、

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$

上を形式的に $\vec{x} = U\vec{q}$ とかくことにする。

ここで、(2) で導入した $\vec{e_i}$ の性質から、

$\vec{v} \times \vec{x} = q_1(\vec{v} \times \vec{e_1}) + q_2(\vec{v} \times \vec{e_2}) + q_3(\vec{v} \times \vec{e_3}) = \lambda q_1\vec{e_2} - \lambda q_2\vec{e_1} = U\begin{pmatrix} \lambda q_2 \\ -\lambda q_1 \\ 0 \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$

$\vec{x} = U\vec{q}$ より、$\vec{q} = U^{-1}\vec{x}$ (なぜならば U は実直行行列)

これを前の式に代入すれば、$\vec{v} \times \vec{x} = U \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^t \vec{x}$

(1) で書き換えた関係から、A は上の $U \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^t$ であることが分かる。

また、$U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

4. $\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} q_i(t)\vec{e_i}$ を $\frac{d}{dt}\vec{x} = \vec{v} \times \vec{x}$ に代入して、両辺の $\vec{e_i}$ の係数を比較すれば、

$$\dot{q}_1(t) = -\lambda q_2(t), \qquad \dot{q}_2(t) = \lambda q_1(t), \qquad \dot{q}_3(t) = 0$$

これより、

$$q_1(t) = Ae^{i\lambda t} + Be^{-i\lambda t}, \qquad q_2(t) = -iAe^{i\lambda t} + iBe^{-i\lambda t}, \qquad q_3(t) = Const.$$

$\vec{x}$ が実のベクトルであるとすると、$\vec{q}$ も実のベクトルなので、$A = -B$ であることが必要である。よって、

$$q_1(t) = 2A\cos(\lambda t), \qquad q_2(t) = 2A\sin(\lambda t), \qquad q_3(t) = Const.$$

解の振る舞いは、$\vec{v}$ を中心軸とする円運動を表していると考えられる。
これは回転座標系で見たベクトル $\vec{x}$ の変化が, 角速度ベクトルを $\vec{\omega}$ とすると、

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{x}$$

となることを示している。

■ 問題 2 解答

1. 右辺の $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ は $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)$ と書き換えることができるので、新たに $u(t,r) \equiv \dfrac{\chi(t,r)}{r}$ と定義すれば、関数 $\xi(t,r)$ について、

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}$$

が成立する。これは 1 次元の波動方程式で一般解は

$$\chi(t,r) = f(r-ct) + g(r+ct)$$

（ダランベールの解。$f(r-ct)$ が r の正方向に、$g(r+ct)$ が r の負方向に進む波を表す。）よって、与えられた偏微分方程式の一般解は、

$$u(t,r) = \frac{1}{r}\{f(r-ct) + g(r+ct)\}$$

2. 初期条件より、

$$\begin{cases} f(r) + g(r) = re^{-r^2/2r_0^2} \\ f'(r) - g'(r) = 0 \end{cases}$$

よって、$f(r) = g(r) = \dfrac{1}{2}re^{-r^2/(2r_0^2)}$ 1 で得られた結果に代入して、

$$u(t,r) = \frac{1}{2r}\left\{(r-ct)e^{-(r-ct)^2/(2r_0^2)} + (r+ct)e^{-(r+ct)^2/(2r_0^2)}\right\}$$

3. 初期条件より、

$$\begin{cases} f(r) + g(r) = 0 \\ f'(r) - g'(r) = -\frac{1}{c}re^{-r^2/(2r_0^2)} \end{cases}$$

よって、$f(r) = \dfrac{r_0^2}{2c}e^{-r^2/(2r_0^2)}, g(r) = -\dfrac{r_0^2}{2c}e^{-r^2/(2r_0^2)}$ 1 で得られた結果に代入して、

$$u(t,r) = \frac{r_0^2}{2c}\frac{1}{r}\left\{e^{-(r-ct)^2/(2r_0^2)} - e^{-(r+ct)^2/(2r_0^2)}\right\}$$

4. 3 で求めた $u(t,r)$ のフーリエ変換は、

$$\begin{aligned} U(\omega,r) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t,r)e^{i\omega t}dt \\ &= \frac{r_0^2}{2c}\frac{1}{r}e^{-r^2/(2r_0^2)}\int_{-\infty}\infty\left\{e^{-c^2t^2/(2r_0^2)+(i\omega+\frac{cr}{r_0^2})t} - e^{-c^2t^2/(2r_0^2)+(i\omega-\frac{cr}{r_0^2})t}\right\}dt \end{aligned}$$

ここで Gauss 積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2+bt}dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}$$

を用いれば、

$$\begin{aligned} U(\omega,r) &= \frac{r_0^2}{2c}\frac{1}{r}e^{-r^2/2r_0^2}\frac{\sqrt{2\pi r_0^2}}{c}\left\{e^{\frac{r_0^2}{2c^2}}(i\omega+\frac{cr}{r_0^2})^2 - e^{\frac{r_0^2}{2c^2}}(i\omega-\frac{cr}{r_0^2})^2\right\} \\ &= \sqrt{2\pi}i\frac{r_0^3}{rc^2}e^{-\frac{r_0^2}{2c^2}\omega^2}\sin(\frac{r}{c}\omega) \end{aligned}$$

5.

$$
\begin{aligned}
g(\omega) \equiv U(\omega, r = 0) &= i\sqrt{2\pi}\frac{r_0^3}{c^3}\omega e^{-\frac{r_0^2}{2c^2}\omega^2} \lim_{r\to 0}\frac{\sin(\frac{\omega}{c}r)}{\frac{\omega}{c}r} \\
&= i\sqrt{2\pi}\frac{r_0^3}{c^3}\omega e^{-\frac{r_0^2}{2c^2}\omega^2}
\end{aligned}
$$

$|g(\omega)| \propto \omega e^{-r_0^2\omega^2/(2c^2)}$ より

$$
\frac{d}{d\omega}\left(\omega e^{\frac{r_0^2}{2c^2}\omega^2}\right) = \left(1 - \frac{r_0^2}{c^2}\omega^2\right)e^{\frac{r_0^2}{2c^2}\omega^2} = 0
$$

とすると、$\omega = c/r_0$ の時、$g(\omega)$ 最大。