

# 2003 年度 入学試験 一般教育科目

## 問題 1

次の英文はある国際研究集会の案内文である。これを読み、設問 1～4 に答えよ。

### 2nd Announcement - 6th International Interferometry Workshop October 1-3, 2003, US Atomics, San Diego, USA

#### Venue, Dates and Organizers

The 6th International Interferometry Workshop will be held at the main campus of US Atomics, in San Diego, California. The meeting duration is three days, October 1-3. The local scientific organizers are E.Kepler and T.Planck of UCLA, while US Atomics is providing meeting facilities and administrative support by Alice Newton.

#### Meeting Format

As at previous meetings, we wish to have a true ‘workshop’ format with opportunities for extensive interaction and discussion amongst participants. To this end, the meeting will consist of oral presentations (10-20 min duration) with scheduled periods for (a).

#### Workshop Dinner, Facility Visit

A dinner will be organized for the workshop participants, at participants’ own cost - details to be announced later. A visit to the US Atomics facility will be arranged for those interested (please (b) if you are interested when responding).

#### Registration and Abstracts

All potential attendees should register by completing and returning the attached Foreign Visitor Form to Alice Newton by August 17, 2003 (see security requirements, below). US citizens should complete only the name and contact details, and indicate their citizen status. In order to prepare the scientific program an (c) should be sent to E.Kepler by August 22. Please submit electronically as either a Word or PDF file.

#### Proceedings

As at previous meetings, participants should submit copies of their (d) for inclusion in the CD-ROM which will be distributed to all the participants after the workshop. Participants are also encouraged to submit a written (e) for the Proceedings as a more complete record of their work, with a maximum length of 10 pages.

#### Security Requirements

As a DOE facility, access to the US Atomics site is restricted. All non-US citizens MUST (f) and return the accompanying “Foreign Visitor Form” (attached below). All prospective foreign attendees should return this form as soon as possible, no later than 45 days before the meeting (August 17, 2003).

#### Hotel Accommodations and Transport

Accommodation at a discounted rate is available in a number of local hotels. A hotel reservation form follows below, which includes web links. All participants are requested to return it to Alice Newton. With regard to transport, you will find it more flexible if you can (g) a car and drive yourself. For those not renting, details of shuttle vans and public transport will be provided later.

#### Visitor Information

Information for visitors to US Atomics is available at <http://web.usat.com/visitors/> which provides links to maps, information on things to (h) and see in the vicinity, airport information, etc. The online map shows the location of a number of the local hotels.

UCLA: University of California, Los Angeles

1. 研究集会参加者が文中の人物 Alice Newton に送らなければならない書類を全て列挙せよ。ただし、英語、日本語どちらで答えてもよい。
2. この案内文中で、「後日案内する」とされている項目を全て列挙せよ。ただし、英語、日本語どちらで答えてもよい。
3. 文中の (a) ~ (h) に当てはまる語を以下のリストから選択せよ。ただし、同じ語を二回以上選択してはならない。  
abstract, complete, discussion, do, indicate, paper, presentations, rent
4. 下記の状況設定のもとで、Dr. E. Kepler 宛の英文手紙をかけ。必要ならば適当に情報を追加してよい。

差出人の名前は夏目三四郎で、本郷大学の学生である。ごく最近、この研究集会の主題に関連した画期的な実験結果を得た。そこで、この研究集会に出席し、発表したいと思うが、参加申し込みの締め切り日はすでに過ぎている。

## 問題 2

次の英文を読んで、設問 1, 2, 3 に答えよ。

The second law of thermodynamics is the law of decay. It says that isolated systems tend to become more disordered as time passes: that iced and hot tea soon become indistinguishable, that all living creatures must sicken and die, and that all machines must someday wear out.

Consider a room which is divided into two sections, A and B, by an impermeable partition where there is a pinhole. The air on both sides is at the same pressure and temperature. Randomly moving air molecules, some fast and some slow, pass through the pinhole in either direction. It may be unlikely, but surely it is possible, that most of the molecules passing from A to B happen to be fast, while most of those passing from B to A happen to be slow. If the process continues long enough, region B becomes unbearably hot while region A becomes frigid. The second law of thermodynamics is flouted! However, the probability of this occurrence is unimaginably tiny. It is as unlikely as flipping a fair coin a billion billion times and coming up heads every time. It is so unlikely as to be, for any practical purpose or otherwise, impossible.

Enter James Clerk Maxwell, the nineteenth-century physicist. He proposed a scheme to evade the second law that does not rely on chance. “Now consider a creature,” he wrote, “who knows the paths of all the molecules, but who can do no work but to open and close the hole in the diaphragm.” This hypothetical being, known as *Maxwell's demon*, allows fast molecules to pass from A to B and slow molecules to pass from B to A. All others find the door closed. In this case, a temperature difference between the two regions will certainly develop. The second law is undone “by the intelligence of a very observant and neat-fingered being.”

There is a loophole to this argument; you can't fool Mother Nature. The system consisting of room, diaphragm, door, and demon is not isolated. The metabolism of the imaginary being must be taken into account. Whether it be microbe, machine, or genetically engineered monster, it must be connected to the outside world to take its sustenance and eject its waste products. When these are taken into account, the order created in the room is necessarily compensated, or more than compensated, by the disorder produced outside its walls.

flout : (規則を) 無視する、侮辱する	evade : (巧みに) 避ける、逃れる
diaphragm : 障壁	metabolism : (新陳) 代謝
microbe : 微生物	sustenance : 食物、栄養物

1. 文中の下線部を和訳せよ。
2. この英文では、「マックスウェルの悪魔」が存在して熱力学の第 2 法則が破れることがあり得ると言っているのか、あり得ないと言っているのか、理由も含めて 200 字程度の日本語で答えよ。
3. 熱力学の第 2 法則を表す具体的な例を 50 words 程度の英語で示せ。ただし、この英文とは別の例を挙げること。

## 問題 1

変数  $x$  についての 2 次以下の次数の多項式のなす線形空間を  $V$  とする。

線形写像  $F : V \rightarrow V$  を以下のように定める。

$$\text{任意の } p(x) \in V \text{ に対して } F(p(x)) = p(ax + b)$$

ここで  $a, b$  は定数で、 $a \neq 1$  とする。以下の問に答えよ。

1.  $F(x^2 + x + 1)$  を求めよ。
2.  $V$  の基底を  $e_0(x) = 1, e_1(x) = x, e_2(x) = x^2$  と選ぶ。このとき  $F$  の表現行列  $M$ , すなわち

$$(F(e_0(x)), F(e_1(x)), F(e_2(x))) = (e_0(x), e_1(x), e_2(x))M$$

となる行列  $M$  を求めよ。

3. 線形写像  $F$  の固有値、固有ベクトルを求めよ。
4. 任意の自然数  $k$  について、 $F$  を  $e_1(x)$  に  $k$  回作用させて得られる  $V$  の元を求めよ。
5. 任意の自然数  $k$  について、 $F$  を  $e_2(x)$  に  $k$  回作用させて得られる  $V$  の元を求めよ。

## 問題 2

1.  $u_k(x, t) = e^{ikx+i\omega t}$  とおく。  $u = u_k(x, t)$  が、次の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を満たすように  $\omega$  を定めよ。ただし、 $a$  を正の定数、 $x$  および  $t$  は実数とする。

2. 1. で得られた  $u_k(x, t)$  を用いて、上の偏微分方程式の解を

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k u_k(x, t) dk$$

とおく。与えられた関数  $f(x)$  に対し、初期条件  $u(x, 0) = f(x)$  をみたすように  $A_k$  を  $f(x)$  を用いて表わせ。ただし、 $k$  についての積分は実行しなくてよい。

3.  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} e^{-a^2 k^2 t} dk$  を求めよ。ただし、 $y$  は定数で、 $t > 0$  とする。
4. 3. の結果を用いて 2. の  $k$  についての積分を実行し、初期値問題の解  $u(x, t)$  を求めよ。
5.  $f(x)$  が次のように与えられているとする。

$$f(x) = \begin{cases} U & \text{if } |x| \leq L \\ 0 & \text{if } |x| > L \end{cases}$$

ただし、 $U$  と  $L (> 0)$  は定数とする。このとき、 $u(x, t)$  を  $\text{erf}(z)$  を用いて表わせ。ここで、全ての实数  $z$  について

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy$$

と定義する。

## 問題 1 解答

全訳

2 度目の告知 第 6 回国際干渉計測研究集会  
2003 年 10 月 1-3 日 アメリカ原子力機関, San Diego, USA

### 開催地 日程 主催者

第 6 回国際干渉計測研究集会が San Diego California の US Atomics のメインキャンパスで開かれます。集会の期間は 10 月 1-3 日の 3 日間です。地元の主催科学者は UCLA の E.Kepler と T.Planck です。一方、US Atomics は Alice Newton により集会施設と行政上の支援を提供します。

### 集会構成

前の集会のときのように私たちは参加者間の広範囲にわたる交流、議論の機会のための真の「研究集会」の構成したい。この目的のために集会は議論のための定められた時間を伴う口頭発表 (10-20 分) からなる。

### 集会での夕食 施設への訪問

夕食会が集会の参加者のために、参加者負担でおこなわれます。詳細は後で発表されます。US Atomics 施設への訪問は興味のある人のためにとりはかわられます。(興味があれば返答する際に示唆してください。)

### 登録とアブストラクト

参加する可能性のあるすべての人は 2003 年 8 月 17 日までに Alice Newton に、取り付けられた訪問外国者用紙を仕上げて返信することによって登録するべきです (下の (安全保障上、必要なこと) を見よ)。アメリカ国民は名前と連絡の詳細を仕上げ国民の身分を示すだけで十分です。科学プログラムを準備するため、8 月 22 日までに E.Kepler に要約を送るべきです。Word か PDF ファイルにして電子メールで提出してください。

### 議事

集会のあとで参加者に配布される CD-ROM に含むため、参加者は発表のコピーを提出するべきです。参加者はより完全な発表の記録として最大 10 ページで議事のために論文を提出することがすすめられます。

### 安全保障上、必要なこと

エネルギー省の施設なので US Atomics 施設へのアクセスは制限されます。アメリカ国民でないすべての人は外国訪問フォーム (下に取り付けられてる) を仕上げて返信しなければなりません。参加する見込みのあるすべての外国人は集会 (2003 年 10 月 17 日) の 45 日前よりも前にできるだけ早く返信するべきです。

### 宿泊設備と移動

多くの地域ホテルで値引きされた値段で宿泊設備が利用可能です。ホテルの予約フォームは以下にあってウェブのリンクを含みます。すべての参加者は Alice Newton に返信することが求められます。移動に関しては車を借りて自分自身で運転することができればかなり融通がきくとわかるでしょう。借りない人たちにはシャトルバスや公共の移動手段の詳細があとで提供されます。

### 訪問者情報

US Atomics への訪問者の情報は <http://web.usct.com/visitors/> で利用可能でそれは地図へのリンク、近隣の観光情報、空港情報等を提供します。オンライン地図はたくさんの地域ホテルの位置を示します。

1. Foreign Visitor Form, hotel reservation form
2. dinner, details of shuttle vans and public transport
3. (a) discussion (b) indicate (c) abstract (d) presentations (e) paper (f) complete (g) rent (h) do
- 4.

University of Hongo.  
Hongo Bunkyo, Tokyo  
August 30, 2003

Mr. E.Kepler  
University of California Los Angeles.

San Diego  
U.S.A.

Dear Dr. E. Kepler,

My name is Sanshiro Natsume, a student of University of Hongo.  
Recently I got an amazing experimental result related to the subject of  
this workshop organized by you. So I wish I could attend the workshop  
to present the results, but the deadline for application to attend is  
over. Would you please make it so that I can attend the workshop?  
I will be waiting for your reply.

Yours truly,  
Sanshiro Natsume

## 問題 2 解答

全訳

熱力学第二法則は崩壊の法則である。それによると、時間が経過するに従い孤立系はより無秩序になりやすい。すなわち、氷で冷やしたお茶と熱いお茶はいつか見分けがつかなくなる。すべての生物は病気になり死ぬ。すべての機械はいつか使えなくなる、ということである。

ピンホールのある浸透性のない仕切りで二つの部分 A と B に分割された部屋を考えよう。両方での空気は等圧、等温である。中には速く、中には遅いランダムに動く空気分子はピンホールをいずれかの方向に通り抜ける。A から B へ通るほとんどの分子がたまたま速い一方、B から A へ通るほとんどの分子がたまたま遅いことはありえなさそうだが、もちろん可能性はある。もしその過程が十分長く続けば領域 B は耐え難いほど熱くなる一方、領域 A は極寒になる。熱力学第二法則は無視されている！しかしながらこれが起こる確率は信じられないくらい小さい。それは公正なコインを何十億の何十億回投げて毎回表が出るくらいありえない。いかなる実用的な目的やそうでなくてもそれは不可能くらいありえない。

19 世紀の物理学者、ジェームズ クラーク マックスウェルが現れる。彼は確率に依らない、第二法則を避ける案を提案した。「さあ、ある生き物を考えよう」彼は書いた、「それはすべての分子の経路を知っているが、障壁の穴を開けたり、閉じたりする仕事しかできない。」マックスウェルの悪魔として知られる仮説上の存在は速い分子が A から B へ通り、遅い分子が B から A へ通ることを許容する。他のすべての人はドアが閉じているとわかる。この場合、二つの領域の温度差は確実に上昇する。第二法則は「非常に注意深く、適切な指をもつ存在の知性」によって破れる。

この議論には抜け穴がある。大自然をだますことはできない。部屋、障壁、ドア、悪魔からなる系は孤立していない。想像上の存在の代謝を考慮にいれないといけない。微生物、機械や遺伝的に設計された怪物であれ、栄養物を取り、廃棄物を排出するため、外部の世界とつながっていなければならない。これらが考慮されたとき、壁の外部で生み出された無秩序により、部屋で作りだされた秩序は必然的に補われ、あるいは補われる以上のものがある。

1. マックスウェルは確率に依らない第二法則を避ける案を提案した。「さあ、ある生物を考えよう。」彼は書いた。「それは全ての分子の経路をしっているが、隔壁の穴を開けたり閉じたりする仕事しかできない。」マックスウェルの悪魔として知られるこの仮説上の生物は速い分子が A から B へ通り、遅い分子が B から A へ通ることを許容する。
2. 部屋、隔壁、ドア、悪魔から成り立ってる系は孤立系ではない。またマックスウェルの悪魔の代謝も考える必要がある。それがいかなるものであれ、栄養物を摂取し、不要物を排出するために外部世界とつながっていなければならない。これらを考慮に入れると、部屋で作り出した秩序は部屋の外部の無秩序によって補われ、熱力学第二法則が破れることはない。
3. Consider a system made of atoms whose spins are at first in a specific direction. As time passes by the direction of spins become isotropic. Thus the ferromagnetic system will turn to paramagnetic system.



## 問題 1 解答

1.  $F$  の定義より

$$\begin{aligned} F(x^2 + x + 1) &= (ax + b)^2 + (ax + b) + 1 \\ &= a^2x^2 + a(2b + 1)x + b^2 + b + 1 \end{aligned}$$

2.  $F(e_0(x)) = 1$ ,  $F(e_1(x)) = ax + b$ ,  $F(e_2(x)) = a^2x^2 + 2abx + b^2$  だから

$$(1, \quad ax + b, \quad a^2x^2 + 2abx + b^2) = (1, \quad x, \quad x^2)M$$

となる  $M$  を求めればよい。従って

$$M = \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & a & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

である。

3. 線形写像  $F$  の固有値を  $\lambda$ 、固有ベクトルを  $v(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$  とおく。問題文に与えられた基底を用いると、固有ベクトルは

$$v = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

と表現できるので、 $Mv = \lambda v$  を満たす  $\lambda$  と  $v \neq 0$  を求めればよい。固有方程式  $|\lambda I - M| = 0$  ( $I$  は単位行列)、すなわち

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -b & -b^2 \\ 0 & \lambda - a & -2ab \\ 0 & 0 & \lambda - a^2 \end{vmatrix} = 0$$

を解いて、固有値  $\lambda = 1, a, a^2$  を得る。これに対応する固有ベクトルの表現はそれぞれ、順に

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b \\ a - 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b^2 \\ 2b(a - 1) \\ (a - 1)^2 \end{pmatrix}$$

である。まとめると、 $F$  の固有値と固有ベクトルの組は

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1, & v_0(x) &= 1 \\ \lambda_1 &= a, & v_1(x) &= b + (a - 1)x \\ \lambda_2 &= a^2, & v_2(x) &= b^2 + 2b(a - 1)x + (a - 1)^2x^2 \end{aligned}$$

である。

4.  $e_1(x) = x$  は、固有ベクトルを用いて

$$e_1(x) = \frac{1}{a - 1}(-bv_0(x) + v_1(x))$$

と表せる。従って

$$F^k(e_1(x)) = \frac{1}{a - 1}(-b\lambda_0^k v_0(x) + \lambda_1^k v_1(x)) = \frac{1}{a - 1} [b(a^k - 1) + a^k(a - 1)x]$$

5.  $e_2(x) = x^2$  は、固有ベクトルを用いて

$$e_2(x) = \frac{1}{(a-1)^2}(b^2 v_0(x) - 2b v_1(x) + v_2(x))$$

と表せる。従って

$$\begin{aligned} F^k(e_2(x)) &= \frac{1}{(a-1)^2}(b^2 \lambda_0^k v_0(x) - 2b \lambda_1^k v_1(x) + \lambda_2^k v_2(x)) \\ &= \frac{1}{(a-1)^2} [(a^k - 1)^2 b^2 + 2a^k(a^k - 1)(a-1)bx + a^{2k}(a-1)^2 x^2] \end{aligned}$$

## 問題 2 解答

1.  $u = u_k(x, t) = e^{ikx+i\omega t}$  を題意の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \dots (1)$$

に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= i\omega u_k(x, t), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= (ik)^2 u_k(x, t) = -k^2 u_k(x, t). \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} i\omega &= -a^2 k^2 \\ \therefore \omega &= ia^2 k^2 \quad \dots (2) \end{aligned}$$

と求められる。

2. 与式

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k u_k(x, t) dk \quad \dots (3)$$

に  $t = 0$  を代入すると

$$u(x, 0) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k e^{ikx} dk. \quad \dots (4)$$

これは Fourier 逆変換に他ならないので、Fourier 変換により

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad \dots (5)$$

と求められる。

3. 題意の積分を

$$g(y) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} e^{-a^2 k^2 t} dk \quad \dots (6)$$

とおく。すると、

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dy} &= \int_{-\infty}^{\infty} ik e^{iky} e^{-a^2 k^2 t} dk \\ &= -\frac{i}{2a^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} \left( \frac{d}{dk} e^{-a^2 k^2 t} \right) dk \\ &= -\frac{i}{2a^2 t} \left( \left[ e^{iky} e^{-a^2 k^2 t} \right]_{-\infty}^{\infty} - iy \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} e^{-a^2 k^2 t} dk \right) \\ &= -\frac{y}{2a^2 t} g(y) \quad (\because t > 0) \quad \dots (7) \end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned} g(y) &= g(0) \exp\left(-\frac{y^2}{4a^2 t}\right) \\ &= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4a^2 t}\right). \quad (\text{ Gauss 積分 }) \quad \dots (8) \end{aligned}$$

以上から、題意の積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} e^{-a^2 k^2 t} dk = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4a^2 t}\right) \quad \dots (9)$$

である。

3. (別解)

積分  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+ibx} dx$  を計算する。ここで  $a, b$  は定数であり、 $a > 0$  である。これらは便宜上導入した文字であり、問で与えられた文字とは関係がない。

さて、考えている積分を変形すると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+ibx} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-\frac{ib}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a}} dx \\ &= e^{-\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-ia)^2} dx \quad \left(\alpha \equiv \frac{b}{2a}\right) \end{aligned} \quad \dots (10)$$

となる。そこで、図 1 のような積分経路  $C$  を考え、複素積分  $\oint_C e^{-az^2} dz$  を計算する。ここで  $X$  は十分大きい正の数である。また、図 1 では  $\alpha > 0$  として経路を描いているが、 $\alpha < 0$  の場合も本質的に同じである。

まず、 $e^{-az^2}$  は至るところ正則だから、Cauchy の積分定理より

$$\oint_C e^{-az^2} dz = 0. \quad \dots (11)$$

一方、積分経路を  $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$  と分解し、その各々について  $X \rightarrow \infty$  における積分を評価すると

$$\begin{aligned} \int_{C_1} e^{-az^2} dz &= \int_{-X}^X e^{-ax^2} dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \\ \int_{C_3} e^{-az^2} dz &= \int_X^{-X} e^{-a(x-ia)^2} dx = - \int_{-X}^X e^{-a(x-ia)^2} dx \rightarrow - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-ia)^2} dx \\ \left| \int_{C_2} e^{-az^2} dz \right| &\leq \max_{z \in C_2} |e^{-az^2}| \cdot \int_{C_2} |dz| = e^{-a(X^2-a^2)} \cdot \alpha \rightarrow 0 \\ \left| \int_{C_4} e^{-az^2} dz \right| &\leq \max_{z \in C_4} |e^{-az^2}| \cdot \int_{C_4} |dz| = e^{-a(X^2-a^2)} \cdot \alpha \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となる。従って、 $X \rightarrow \infty$  で

$$\oint_C e^{-az^2} dz \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-ia)^2} dx \quad \dots (12)$$

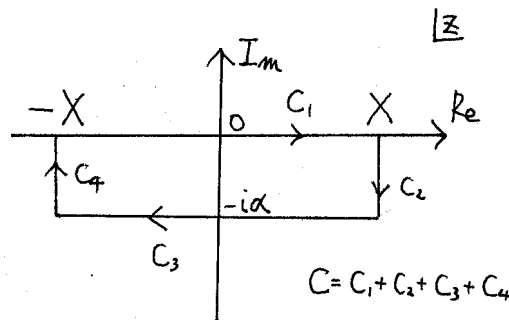


図 1: 3. (別解) における積分経路

が成り立つ。

以上、(11)(12) と Gauss 積分の公式から

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-i\alpha)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \dots (13)$$

が成立する。これと (10) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+ibx} dx = e^{-\frac{b^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \dots (14)$$

であるから、求めるべき積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} e^{-a^2k^2t} dk = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4a^2t}\right) \quad \dots (15)$$

である。

4. (3)(5) より

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{-ikx'} e^{ikx+i\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{ik(x-x')} e^{-a^2k^2t} \quad (\because (2)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \cdot \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a^2t}\right] \quad (\because (9)) \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a^2t}\right] \quad \dots (16) \end{aligned}$$

と求まる。

5. 題意より

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{U}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-L}^L dx' \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a^2t}\right] \\ &= \frac{U}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot 2a\sqrt{t} \int_{\frac{-x-L}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{-x+L}{2a\sqrt{t}}} e^{-y^2} dy \quad \left(y \equiv \frac{x'-x}{2a\sqrt{t}}\right) \\ &= \frac{U}{2} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{-x+L}{2a\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{-x-L}{2a\sqrt{t}}\right) \right] \quad \dots (17) \end{aligned}$$

と表される。