2003年度　入学試験 一般教育科目（英語なし）

■ 問題1

変数 x についての 2 次以下の次数の多項式のなす線形空間を V とする。
線形写像 $F : V \longrightarrow V$ を以下のように定める。

$$\text{任意の } p(x) \in V \text{ に対して} \quad F(p(x)) = p(ax+b)$$

ここで a, b は定数で、$a \neq 1$ とする。以下の問に答えよ。

1. $F(x^2 + x + 1)$ を求めよ。

2. V の基底を $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$, $e_2(x) = x^2$ と選ぶ。このとき F の表現行列 M, すなわち

$$(F(e_0(x)), F(e_1(x)), F(e_2(x))) = (e_0(x),\ e_1(x),\ e_2(x))M$$

   となる行列 M を求めよ。

3. 線形写像 F の固有値、固有ベクトルを求めよ。

4. 任意の自然数 k について、F を $e_1(x)$ に k 回作用させて得られる V の元を求めよ。

5. 任意の自然数 k について、F を $e_2(x)$ に k 回作用させて得られる V の元を求めよ。

■ 問題 2

1. $u_k(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx+\mathrm{i}\omega t}$ とおく。$u = u_k(x,t)$ が、次の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を満たすように ω を定めよ。ただし、a を正の定数、x および t は実数とする。

2. 1. で得られた $u_k(x,t)$ を用いて、上の偏微分方程式の解を

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k u_k(x,t) \mathrm{d}k$$

とおく。与えられた関数 $f(x)$ に対し、初期条件 $u(x,0) = f(x)$ をみたすように A_k を $f(x)$ を用いて表わせ。ただし、k についての積分は実行しなくてよい。

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky} \mathrm{e}^{-a^2k^2t} \mathrm{d}k$ を求めよ。ただし、y は定数で、$t > 0$ とする。

4. 3. の結果を用いて 2. の k についての積分を実行し、初期値問題の解 $u(x,t)$ を求めよ。

5. $f(x)$ が次のように与えられているとする。

$$f(x) = \begin{cases} U & \text{if } |x| \le L \\ 0 & \text{if } |x| > L \end{cases}$$

ただし、U と $L(> 0)$ は定数とする。このとき、$u(x,t)$ を erf(z) を用いて表わせ。ここで、全ての実数 z について

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \mathrm{e}^{-y^2} \mathrm{d}y$$

と定義する。

■ 問題 1 解答

1. F の定義より

$$
\begin{aligned}
F(x^2+x+1) &= (ax+b)^2+(ax+b)+1 \\
&= a^2x^2+a(2b+1)x+b^2+b+1
\end{aligned}
$$

2. $F(e_0(x))=1,\ F(e_1(x))=ax+b,\ F(e_2(x))=a^2x^2+2abx+b^2$ だから

$$
(1,\quad ax+b,\quad a^2x^2+2abx+b^2)=(1,\quad x,\quad x^2)\,M
$$

となる M を求めればよい。従って

$$
M=\begin{pmatrix}1 & b & b^2\\ 0 & a & 2ab\\ 0 & 0 & a^2\end{pmatrix}
$$

である。

3. 線形写像 F の固有値を λ、固有ベクトルを $v(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$ とおく。問題文に与えられた基底を用いると、固有ベクトルは

$$
\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}c_0\\ c_1\\ c_2\end{pmatrix}
$$

と表現できるので、$M\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$ を満たす λ と $\boldsymbol{v}\neq 0$ を求めればよい。固有方程式 $|\lambda I-M|=0$ (I は単位行列)、すなわち

$$
\begin{vmatrix}\lambda-1 & -b & -b^2\\ 0 & \lambda-a & -2ab\\ 0 & 0 & \lambda-a^2\end{vmatrix}=0
$$

を解いて、固有値 $\lambda=1,\ a,\ a^2$ を得る。これに対応する固有ベクトルの表現はそれぞれ、順に

$$
\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}b\\ a-1\\ 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}b^2\\ 2b(a-1)\\ (a-1)^2\end{pmatrix}
$$

である。まとめると、F の固有値と固有ベクトルの組は

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 &= 1, & v_0(x) &= 1\\
\lambda_1 &= a, & v_1(x) &= b+(a-1)x\\
\lambda_2 &= a^2, & v_2(x) &= b^2+2b(a-1)x+(a-1)^2x^2
\end{aligned}
$$

である。

4. $e_1(x)=x$ は、固有ベクトルを用いて

$$
e_1(x)=\frac{1}{a-1}(-b\,v_0(x)+v_1(x))
$$

と表せる。従って

$$
F^k(e_1(x))=\frac{1}{a-1}(-b\,\lambda_0{}^k\,v_0(x)+\lambda_1{}^k\,v_1(x))=\frac{1}{a-1}\left[b(a^k-1)+a^k(a-1)x\right]
$$

5.　$e_2(x) = x^2$ は、固有ベクトルを用いて

$$e_2(x) = \frac{1}{(a-1)^2}(b^2\,v_0(x) - 2b\,v_1(x) + v_2(x))$$

と表せる。従って

$$\begin{aligned} F^k(e_2(x)) &= \frac{1}{(a-1)^2}(b^2\,{\lambda_0}^k\,v_0(x) - 2b\,{\lambda_1}^k\,v_1(x) + {\lambda_2}^k\,v_2(x)) \\ &= \frac{1}{(a-1)^2}\left[(a^k-1)^2b^2 + 2a^k(a^k-1)(a-1)bx + a^{2k}(a-1)^2x^2\right] \end{aligned}$$

■ 問題 2 解答

1. $u = u_k(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx+\mathrm{i}\omega t}$ を題意の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \cdots (1)$$

に代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \mathrm{i}\omega u_k(x,t),\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= (\mathrm{i}k)^2 u_k(x,t) = -k^2 u_k(x,t).\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\omega &= -a^2k^2\\ \therefore \omega &= \mathrm{i}a^2k^2 \qquad \cdots (2)\end{aligned}$$

と求められる。

2. 与式

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k u_k(x,t)\mathrm{d}k \qquad \cdots (3)$$

に $t = 0$ を代入すると

$$u(x,0) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k. \qquad \cdots (4)$$

これは Fourier 逆変換に他ならないので、Fourier 変換により

$$A_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \qquad \cdots (5)$$

と求められる。

3. 題意の積分を

$$g(y) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\mathrm{e}^{-a^2k^2t}\mathrm{d}k \qquad \cdots (6)$$

とおく。すると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\mathrm{e}^{-a^2k^2t}\mathrm{d}k\\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2a^2t}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\mathrm{e}^{-a^2k^2t}\right)\mathrm{d}k\\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2a^2t}\left(\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\mathrm{e}^{-a^2k^2t}\right]_{-\infty}^{\infty} - \mathrm{i}y\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\mathrm{e}^{-a^2k^2t}\right)\\ &= -\frac{y}{2a^2t}g(y) \quad (\because t > 0) \qquad \cdots (7)\end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned}g(y) &= g(0)\exp\left(-\frac{y^2}{4a^2t}\right)\\ &= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\exp\left(-\frac{y^2}{4a^2t}\right). \quad (\because \text{Gauss 積分}) \qquad \cdots (8)\end{aligned}$$

以上から、題意の積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky} \mathrm{e}^{-a^2k^2t} \mathrm{d}k = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4a^2t}\right) \qquad \cdots (9)$$

である。

3.（別解）

積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2+\mathrm{i}bx} \mathrm{d}x$ を計算する。ここで a, b は定数であり、$a > 0$ である。これらは便宜上導入した文字であり、問で与えられた文字とは関係がない。

さて、考えている積分を変形すると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2+\mathrm{i}bx} \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a\left(x-\frac{\mathrm{i}b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}} \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a(x-\mathrm{i}\alpha)^2} \mathrm{d}x \quad \left(\alpha \equiv \frac{b}{2a}\right) \end{aligned} \qquad \cdots (10)$$

となる。そこで、図 1 のような積分経路 C を考え、複素積分 $\oint_C \mathrm{e}^{-az^2} \mathrm{d}z$ を計算する。ここで X は十分大きい正の数である。また、図 1 では $\alpha > 0$ として経路を描いているが、$\alpha < 0$ の場合も本質的に同じである。

まず、e^{-az^2} は至るところ正則だから、Cauchy の積分定理より

$$\oint_C \mathrm{e}^{-az^2} \mathrm{d}z = 0. \qquad \cdots (11)$$

一方、積分経路を $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ と分解し、その各々について $X \to \infty$ における積分を評価すると

$$\begin{aligned} &\int_{C_1} \mathrm{e}^{-az^2} \mathrm{d}z = \int_{-X}^{X} \mathrm{e}^{-ax^2} \mathrm{d}x \to \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \mathrm{d}x \\ &\int_{C_3} \mathrm{e}^{-az^2} \mathrm{d}z = \int_{X}^{-X} \mathrm{e}^{-a(x-\mathrm{i}\alpha)^2} \mathrm{d}x = -\int_{-X}^{X} \mathrm{e}^{-a(x-\mathrm{i}\alpha)^2} \mathrm{d}x \to -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a(x-\mathrm{i}\alpha)^2} \mathrm{d}x \\ &\left|\int_{C_2} \mathrm{e}^{-az^2} \mathrm{d}z\right| \leq \max_{z\in C_2} \left|\mathrm{e}^{-az^2}\right| \cdot \int_{C_2} |\mathrm{d}z| = \mathrm{e}^{-a(X^2-\alpha^2)} \cdot \alpha \to 0 \\ &\left|\int_{C_4} \mathrm{e}^{-az^2} \mathrm{d}z\right| \leq \max_{z\in C_4} \left|\mathrm{e}^{-az^2}\right| \cdot \int_{C_4} |\mathrm{d}z| = \mathrm{e}^{-a(X^2-\alpha^2)} \cdot \alpha \to 0 \end{aligned}$$

となる。従って、$X \to \infty$ で

$$\oint_C \mathrm{e}^{-az^2} \mathrm{d}z \to \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a(x-\mathrm{i}\alpha)^2} \mathrm{d}x \qquad \cdots (12)$$

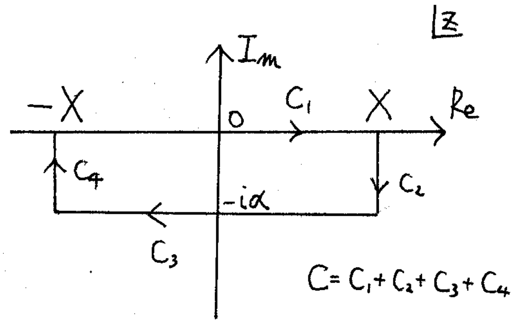

図 1: 3.（別解）における積分経路

が成り立つ。

以上、(11)(12) と Gauss 積分の公式から

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a(x-\mathrm{i}\alpha)^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \cdots (13)$$

が成立する。これと (10) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2+\mathrm{i}bx}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \cdots (14)$$

であるから、求めるべき積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\mathrm{e}^{-a^2k^2t}\mathrm{d}k = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\exp\left(-\frac{y^2}{4a^2t}\right) \qquad \cdots (15)$$

である。

4. (3)(5) より

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\, f(x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx+\mathrm{i}\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\, f(x')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}\mathrm{e}^{-a^2k^2t} \quad (\because (2)) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\, f(x')\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a^2t}\right] \quad (\because (9)) \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\, f(x')\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a^2t}\right] \qquad \cdots (16) \end{aligned}$$

と求まる。

5. 題意より

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{U}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-L}^{L}\mathrm{d}x'\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4a^2t}\right] \\ &= \frac{U}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot 2a\sqrt{t}\int_{\frac{-x-L}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{-x+L}{2a\sqrt{t}}}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y \quad \left(y \equiv \frac{x'-x}{2a\sqrt{t}}\right) \\ &= \frac{U}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{-x+L}{2a\sqrt{t}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{-x-L}{2a\sqrt{t}}\right)\right] \qquad \cdots (17) \end{aligned}$$

と表される。