

2003 年度 入学試験 物理専門科目

問題 1

質量 m 、振動数 ω をもつ一次元調和振動子のハミルトニアン演算子 \mathbf{H} は

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{x}^2$$

で与えられる。ここで、 \mathbf{x} と \mathbf{p} はそれぞれ位置座標演算子と運動量演算子である。この系を解析するために、ハイゼンベルグ表示を用いる。また、演算子

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\mathbf{x}(0) + i\frac{\mathbf{p}(0)}{m\omega}), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\mathbf{x}(0) - i\frac{\mathbf{p}(0)}{m\omega})$$

を導入する。ここで、 $\mathbf{x}(0)$ と $\mathbf{p}(0)$ は時刻 $t=0$ での演算子である。以下の問いに答えよ。

1. 演算子 $\mathbf{N} = a^\dagger a$ と a^\dagger との交換関係および \mathbf{N} と a との交換関係を求めよ。
2. 演算子 \mathbf{N} の固有状態を $|n\rangle$ とし、その固有値を n とすると、

$$\mathbf{N}|n\rangle = n|n\rangle$$

が成り立つ。ここで、 $a^\dagger|n\rangle = C|n+1\rangle$ および $a|n\rangle = D|n-1\rangle$ であることを示し、係数 C と D を求めよ。ただし、係数 C と D は正の数とし、状態 $|n\rangle$ は $\langle n|n\rangle = 1$ と規格化されているとする。

3. 上の結果を用いて n がゼロ又は正の整数であることを証明せよ。

さて、ハイゼンベルグ表示では演算子 $\mathbf{x}(t)$ および演算子 $\mathbf{p}(t)$ は時刻 t に依存する。それらの演算子の時間変化はハイゼンベルグ方程式で与えられる。以下の問いに答えよ。

4. $\mathbf{x}(t)$ および $\mathbf{p}(t)$ についてのハイゼンベルグ方程式を書け。
5. 上記の方程式を解いて $x(t)$ と $p(t)$ を求め、それらが古典解と類似の時間変動を示すことを示せ。
6. 期待値 $\langle n|\mathbf{x}(t)|n\rangle$ および $\langle n|\mathbf{p}(t)|n\rangle$ を求めよ。
7. 期待値 $\langle \lambda|\mathbf{x}(t)|\lambda\rangle$ および $\langle \lambda|\mathbf{p}(t)|\lambda\rangle$ が調和振動子の古典解と類似の時間変動を示すような状態 $|\lambda\rangle$ は、基底状態 $|G\rangle$ に演算子 a および a^\dagger を作用して作ることができる。つまり、この状態 $|\lambda\rangle$ は $|\lambda\rangle = F(a, a^\dagger)|G\rangle$ と書ける。関数 $F(a, a^\dagger)$ の具体例を示せ。ただし、基底状態は $a|G\rangle = 0$ を満たすものとする。また、状態 $|\lambda\rangle$ の規格化条件は無視してよい。

第 2 問

図のように N 個の単量体が連結された直線的な鎖状分子を考える。各単量体は図のように自由に変形し、長さ a の状態 α (エネルギー: $+\epsilon$) か長さ b の状態 β (エネルギー: $-\epsilon$) のいずれかを、隣り合う単量体とは独立にとることができるとする。

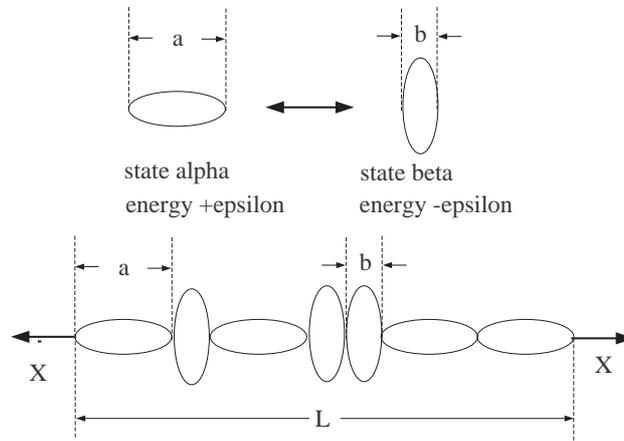


図 1:

鎖状分子が独立した状態にあって、熱平衡に達している場合 (ミクロカノニカル分布) を考える。

1. N_α 個が α 、 N_β 個が β の状態にいる場合を考える ($N = N_\alpha + N_\beta$)。鎖状分子の長さ L とエネルギー E_L を求めよ。また、この状態の熱力学的重率 $W(N_\alpha, N_\beta)$ を求め、鎖状分子のエントロピー S が次のようになることを示せ。

$$S = -k_B \left\{ N_\alpha \log \frac{N_\alpha}{N} + N_\beta \log \frac{N_\beta}{N} \right\} \quad \dots (1)$$

ここで k_B はボルツマン定数である。Stirling の公式、 $\log n! = n \log n - n$ ($n \gg 1$) を用いてよい。また、 \log は自然対数とする。

つぎに、鎖状分子が温度 T の熱浴に接していて、一定の温度状態におかれている場合 (カノニカル分布) を考える。

2. 熱浴の状態密度を $\Omega(E_B)$ とする。鎖状分子と熱浴からなる全系のエネルギーを E_T 、状態 l にある鎖状分子のエネルギーを E_l とすれば ($E_T = E_B + E_l$)、等重率の原理により、状態 l の実現確率は $P(E_l)$ は、 l が指定された場合の微視的状态の数 $\Omega(E_T - E_l)\delta E$ に比例する。

$$P(E_l) \propto \frac{\Omega(E_T - E_l)\delta E}{\Omega(E_T)\delta E} \quad \dots (2)$$

このことから、カノニカル分布では、状態 l の実現状態 $P(E_l)$ は、 $\exp(-E_l/k_B T)$ に比例することを示せ。ただし、熱浴は鎖状分子に比べて十分大きいものとする。また、熱浴の温度が $T = (\partial S / \partial E)^{-1}|_{E=E_T}$ で表せることに留意せよ。

3. 一つの単量体の分配関数 Z_1 を示し、さらに鎖状分子の分配関数 Z_N を導け。
4. 分配関数 Z_N より、Helmholtz の自由エネルギー F 、エントロピー S 、系の内部エネルギー E を求めよ。
5. 比熱 C を求め、温度の関数として図示せよ。ただし縦軸を C/Nk_B とし、横軸を $k_B T / \epsilon$ とせよ。

つぎに、鎖状分子を温度 T の状態においたまま、一定の張力 X で両端を引っ張り、長さ L となった場合を考える。このとき、この系では、熱力学第一法則 $TdS = dE - XdL$ が成立している。(N 個の単量体からなる系を、非常に大きな N_T 個からなる非常に大きな系と考えることができる。)

6. 鎖状分子がエネルギー E_L で長さ L の状態にある確率 $p(E_L, L)$ は、熱浴を含む全系のエネルギーを E_T 、長さを L_T とすると、熱浴の状態密度 $\Omega(E_B) = \Omega(E_T - E_L, L_T - L)$ を用いて

$$p(E_L, L) \propto \frac{\Omega(E_T - E_L, L_T - L)\delta E}{\Omega(E_T, L_T)\delta E} \quad \dots (3)$$

と書ける。 E_T 、 L_T に比べて、 E_L 、 L が十分微視的な量であることを利用して、

$$p(E_L, L) \propto \exp\left\{\frac{1}{k_B T}(-E_L + XL)\right\} \quad \dots (4)$$

であることを示せ。

7. 系の分配関数

$$Y = \sum_{N_\alpha=0}^N W(N_\alpha, N_\beta) p(E(N_\alpha, N_\beta), L(N_\alpha, N_\beta)) \quad \dots (5)$$

について、 N_α に関する和を計算し、 $N, T, X, a, b, +\epsilon, -\epsilon$ を用いて表せ。

8. 分配関数より Gibbs の自由エネルギー G を求め、そこから鎖状分子の長さ L と張力 X に関する関係式を求めよ。

問題 3

電磁場中での電荷 q 、静止質量 m をもつ粒子の加速を考える。電場 \vec{E} 、磁場 \vec{B} の下で荷電粒子はローレンツ力

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \dots (1)$$

を受ける。ここで、 \vec{v} は粒子の速度で、磁場 \vec{B} は常に z 方向に一様で一定、つまり、 $\vec{B} = (0, 0, B)$ とする。また、荷電粒子の運動に伴う電磁場の放出を無視する。

まず、粒子の速度は光速 c に比べて十分小さく、したがって、相対論的效果を考えなくて良いとする。

1. 電場が存在せず、一様な磁場だけがある場合、粒子を時刻 $t = 0$ に初速度 $\vec{v} = (v_0, 0, 0)$ で $\vec{x} = (0, 0, 0)$ から放出した場合にこの粒子の時刻 t での速度と位置を求めよ。
2. 一様磁場に周期的に変動する電場 $\vec{E} = (-E \sin(\Omega t), -E \cos(\Omega t), 0)$ を加え、設問 1 と同じ初期条件で荷電粒子を放出した場合、時刻 t での粒子の速度を求めよ。ただし、 E は定数である。
3. $\Omega = qB/m$ のとき十分時間がたてば荷電粒子の運動エネルギーが時間とともに増大することを示せ。

次に、粒子の速度が光速に比べて無視できない (相対論的) 場合を考える。このときは粒子の運動量 \vec{p} 、エネルギー \mathcal{E} は相対論的表式

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad \mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

で与えられる。ここで、 $v = |\vec{v}|$ である。また、相対論的な場合も式 (1) で与えられるローレンツ力 \vec{F} を使って運動方程式は $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ と書ける。

4. 設問 1 と同じく一様な磁場だけがあり、電場がない場合、粒子の速度が相対論的のときも、運動方程式の両辺と速度 \vec{v} との内積をとることによって粒子の速さ v が運動中一定であることを示せ。
5. 前問までの結果を使って運動方程式を解き、粒子の速度 $\vec{v}(t)$ を求めよ。
6. 相対論的な場合の結果を考慮して、設問 3 と同じく一様な磁場と振動数 $\Omega = qB/m$ で変動する電場が存在する場合、粒子の運動エネルギー ($\mathcal{E} - mc^2$) の増加はとまる。その理由を述べよ。ただし、最初荷電粒子の速さは光速に比べて小さいとして、具体的に相対論的な運動方程式を解く必要はない。

問題 4

宇宙探査機は燃料の不足を補うため、しばしばスイングバイという航法で加速を行うことがある。(例えばアポロ 13 号は月の重力を、火星探査機のもみは地球の重力を使って加速した。) 中心力場の力学からこの原理について考える。

- 2 次元の極座標系 (r, ϕ) を用いて中心力ポテンシャル $U(r)$ 中を運動する質量 m の質点の Lagrangian を書き、Euler-Lagrange の方程式を用いて角運動量の保存則を導け。
- 図 1 のように質量 m の探査機が質量 M の惑星に対して距離 b の漸近線 SS' に沿って無限遠方から速さ v で進入し、漸近線 TT' に沿って出てゆくものとする。ただし、 $M \gg m$ の関係があり、惑星は静止しているとみなしてよい。惑星の位置を原点とし、探査機の座標を (r, ϕ) とするとき次式が成り立つことを示せ。

$$\dot{\phi} = \frac{vb}{r^2} \quad \dots (1)$$

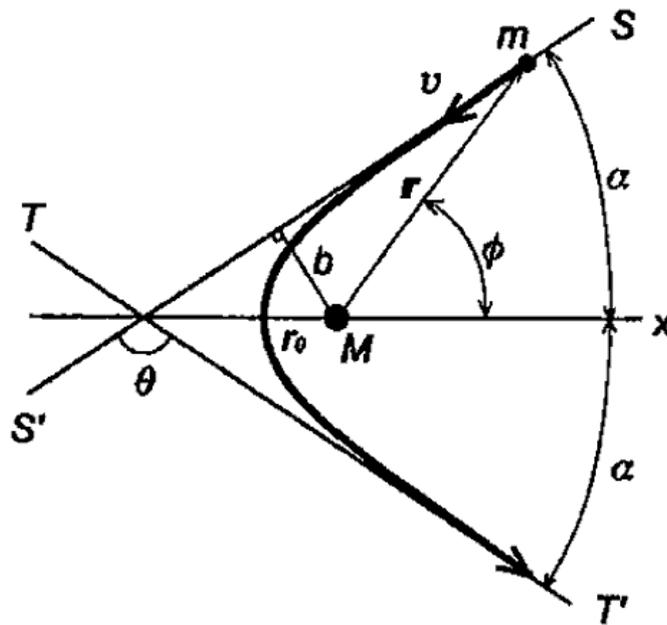


図 1:

- 探査機が惑星に最も近づいた時の惑星までの距離 r_0 を、 v, b, M と重力定数 G を用いて表せ。ただし、ポテンシャル $U(r)$ は、 $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ と表される。
- 探査機の (x, y) 座標系における速度を (v_x, v_y) とおくと、 v_x と ϕ の間に次の微分方程式が成立することを示せ。ただし、式 (1) を用いてよい。

$$dv_x = -\frac{GM}{vb} \cos \phi d\phi \quad \dots (2)$$

- 入射前後における角度変化 θ が $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{GM}{v^2 b}$ で表されることを示せ。ただし、式 (2) を用いてよい。
- 図 2 のように惑星が速度ベクトル \vec{W} で太陽に対して運動していたところへ探査機がやってきた。探査機の太陽に対する相対速度ベクトルが入射前は \vec{v} 、出射後は \vec{u} であったとして、惑星の運動量の変化を無視せずに、入射前後における探査機のエネルギー変化、 $\frac{1}{2}m|\vec{u}|^2 - \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$ を求めよ。ただし、惑星の引力圏では、太陽からの引力は無視できるものとする。

7. 上の結果から探査機の加速が可能なことを示せ。また、増加した探査機のエネルギーはどこから来たか答えよ。

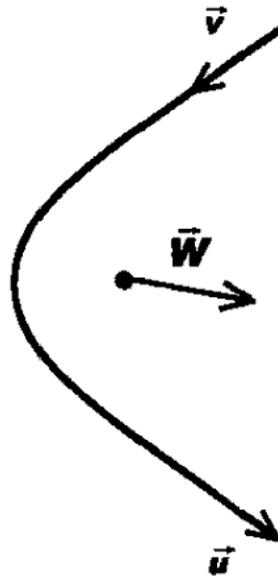


図 2:

問題 5

図 1 に NaI シンチレーションカウンター (NaI 検出器) の原理的な構成を示す。この検出器はタリウムを混入したヨウ化ナトリウム NaI(Tl) の結晶と光電子増倍管から出来ている。光電子増倍管の陽極から出力される電流パルスは抵抗 $R = 500 \text{ k}\Omega$ と電気容量 $C = 20 \text{ pF}$ からなる等価回路で表される出力部回路に送られるものとする。この NaI 検出器を用いて、線源から放射されるガンマ線の検出を行う。以下の設問に答えよ。

但し、光電子増倍管の陰極に光が入射してから増幅された電子群が陽極に達するまでの飛行時間は無視できるものとし、NaI(Tl) 結晶の蛍光減衰定数 $\tau = 230 \text{ ns}$ とする。また、NaI(Tl) 結晶の寸法は、入射ガンマ線との相互作用で生じる 2 次ガンマ線の平均自由行程よりも小さいが、2 次荷電粒子は NaI(Tl) 結晶内で完全に吸収される程度とする。

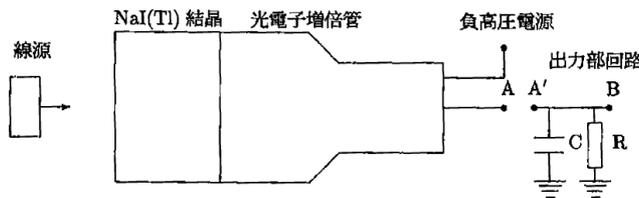


図 2: NaI(Tl) 検出器の原理的な構成

1. ガンマ線が NaI(Tl) の結晶中で起こす相互作用を 3 つ上げ、各々がどのような相互作用であるかを説明せよ。
2. (i) 図 1 で、点 A は光電子増倍管の陽極に同軸ケーブルでつながっているとす。点 A の出力をオシロスコープで見える場合、終端抵抗が必要であるが、その理由を述べ、接続の仕方を図示せよ。
 (ii) 電氣的に正しく終端されたオシロスコープを用いて、点 A におけるガンマ線から来る出力パルスはどのような波形に見えるかを図示せよ。また、点 A と点 A' を結線して出力部回路をつないだ場合、点 B におけるガンマ線からくるパルス波形を図示せよ。どちらの図に対しても、縦軸の電圧のスケールは任意でよいが、横軸の時間スケールが分かるように示すこと。
 (iii) 前問の点 B における波形観察の際、電氣的なノイズが高く、ガンマ線からのパルス波形が見つからなかったとする。その原因が特定されていない場合、どのような工夫を試みるべきか、具体的対処を 2 つあげよ。
3. 出力部回路からの出力を適当な閾値によって波高弁別して計数した。線源をおかない場合、10 分間で 600 カウントだった。線源をおいた場合、2 分間で 1000 カウントだった。
 (i) 線源から放射されるガンマ線の計数率 (カウント/分) とその標準偏差を求めよ。
 (ii) 線源から放射されるガンマ線の計数率を 1 % の精度で求めるには、合計何分間、線源を置いた計数を行えばよいか。但し、答えは分単位で小数点以下繰上げとする。また、線源をおかない計数をやり直さないとする。
4. 線源から放射されるガンマ線のエネルギーが、(a)0.5 MeV、(b)5 MeV の単一エネルギーの場合において、出力部回路からのパルスをエネルギーに換算した度数分布を予想して図示せよ。その際、各々の分布の中で、設問 1 の相互作用がどの成分を占めるかもわかるように示すこと。
5. 設問 4 の (a)、(b) の 2 種類の線源から放射されるガンマ線のエネルギーがおおよそ分かっているが、正確には分かっているとす。NaI 検出器を 1 個だけを用いても、バックグラウンド放射能が高いこと、および、設問 1 の 3 つの相互作用が混在することにより、エネルギーを正確に求めることが困難が状況とする。このような場合でも、同じ NaI 検出器を複数組み合わせる工夫によって、ガンマ線のエネルギーを正確に求められる。設問 4 の (a)、(b) 各々の場合について、その工夫を図示し、ガンマ線のエネルギーが正確に求められる理由を説明せよ。

問題 6

液体ヘリウムの密度は、図 1 のように平行平板コンデンサーとコイルを並列につないだ LC 回路を作り、コンデンサーの間隙を液体ヘリウムで満たしてコンデンサーの容量を測定し、求めることができる。

ヘリウムの分極率を α とすると、密度 ρ と比誘電率 ϵ の間には次の式が成り立つ。ただし、 k は比例定数である。また、 ϵ は真空中の誘電率 ϵ_0 に対する誘電率の比であり、無次元の量である。

$$\frac{1}{k}\alpha\rho = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$$

ヘリウムの分極率は温度と圧力にほとんど依存しないことが知られているため、この実験方法は、密度の温度依存性、圧力依存性などを調べるときに用いられる。以下の設問に答えよ。

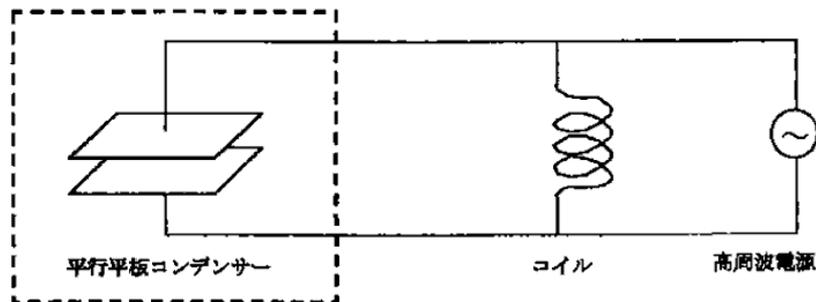


図 1

- 図 1 の LC 回路において、平行平板コンデンサーの間隙が真空のときの容量を C_0 、コイルのインダクタンスを L として共振振動数 (f_0) を求めよ。回路の抵抗、浮遊容量は考えなくてよい。
- 室温で図 1 の LC 回路の f_0 を測定したところ 10MHz となった。このとき、コイルのインダクタンスは $10\mu\text{H}$ 、コンデンサーの平行平板の面積は $1.0 \times 10^{-4}\text{m}^2$ であった。コンデンサーの間隙はいくらか。コンデンサーの間隙は真空とし、真空の誘電率 (ϵ_0) を $8.9 \times 10^{-12}\text{F/m}$ として求めよ。
- コンデンサーの間隙を真空に保ったまま、図 1 の点線で囲まれた部分の温度を下げて共振振動数を測定したところ、温度の低下と共に共振振動数が変化した。考えられる原因について述べよ。
- コンデンサーの間隙を液体ヘリウム (密度 ρ) で満たしたときの共振振動数 (f) を ρ の関数で表わし、4.2K の液体ヘリウム ($\rho = 1.3 \times 10^2\text{kg/m}^3$) で満たしたときの共振振動数を求めよ。 $\alpha/k = 1.1 \times 10^{-5}\text{m}^3/\text{kg}$ である。
- 共振振動数の測定精度が 1Hz のとき、液体ヘリウムの密度の測定精度がいくらになるか述べよ。
- 図 2 は、この方法を使って、液体ヘリウムの密度 ρ をある温度 $T_0(2.2\text{K})$ の近傍で測定し、 T_0 での密度 ρ_0 に対する相対値を表わしたものである。この図をもとに、温度 T_0 付近での液体ヘリウムの密度の温度依存性の特徴とその原因について述べよ。
- 低温実験では、白金、炭素、ゲルマニウムなどの抵抗値を測定して 2 次温度計として利用することが多い。図 3 は、白金抵抗温度計と炭素抵抗温度計の抵抗値の温度依存性を示したものである。図 2 に示した液体ヘリウムの密度の温度依存性の測定には、どちらの温度計を用いるのが適当か、その理由と共に述べよ。
- 図 3 からわかるように、白金抵抗温度計の抵抗値が温度の増加と共に大きくなるのに対し、炭素抵抗温度計の抵抗値は温度の増加と共に小さくなる。それぞれの抵抗温度計の抵抗値が示す温度依存性の原因を述べよ。

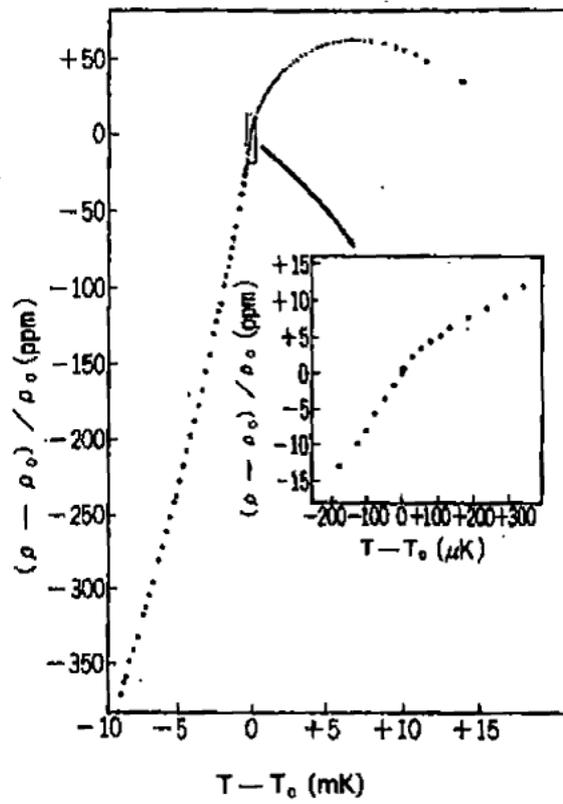


図 2

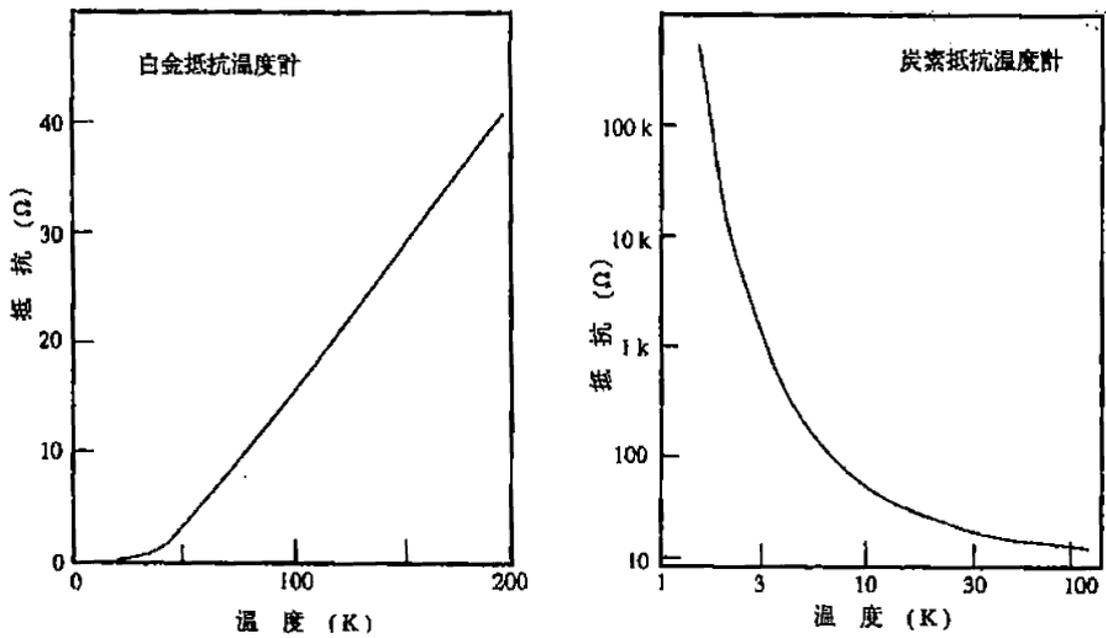


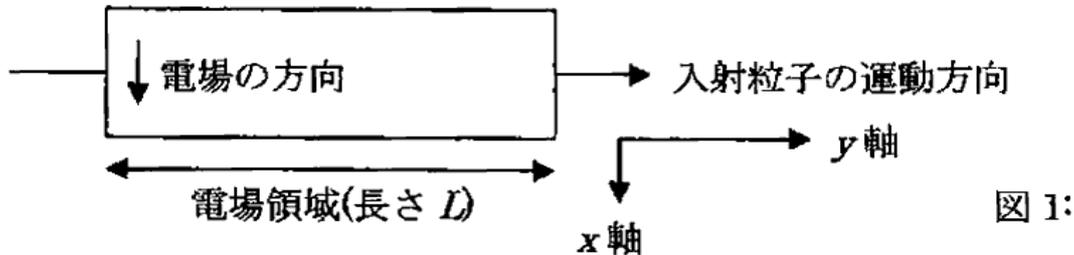
図 3

問題 7

高エネルギー加速器からの陽子ビームを金属標的にあてると、正に帯電した二次粒子として K 中間子の他、 π 中間子、 μ 粒子などが作られる。このうち、正に帯電した K 中間子をビームラインに誘導することを考える。荷電 K 中間子、荷電 π 中間子、中性 π 中間子の質量はそれぞれ、 $494\text{MeV}/c^2$ 、 $135\text{MeV}/c^2$ である。光速 c は $3.0 \times 10^8\text{m/s}$ とする。全問にわたり、数値計算は有効数字 2 桁で求めよ。

金属標的で作られた二次粒子に、進行方向に垂直な磁場を与えると、運動量に比例した軌道半径の円運動をする。 $1.0\text{GeV}/c$ の K 中間子を取り出すつもりで当てた磁場で、 K 中間子以外の粒子にも同じ軌道を飛行するものがある。磁場を通過した後、進行方向と垂直に一様電場を加えることで粒子を種類別に振り分けることができる。質量 m 、運動量 \mathbf{p} の荷電粒子 (電荷 e を持つ) が電場 \mathbf{E} 中を通過するとき、相対論的な運動方程式 $d\mathbf{p}/dt = e\mathbf{E}$ を満たす。

- 図 1 のように、この荷電粒子が電場領域に入射する方向を y 軸、それに垂直な電場の方向を x 軸にとる。荷電粒子が電場領域に入射したときの運動量を \mathbf{p}_0 とする。電場領域に入射したときから時間 t 経過した後の荷電粒子のエネルギー ϵ を求めよ。



- 一般に荷電粒子のエネルギー ϵ 、運動量 \mathbf{p} と速度 \mathbf{v} には $\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/\epsilon$ の関係がある。このことを用い、さらに時間積分することにより、荷電粒子の座標 x と y を求めよ。必要ならば、積分公式 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1} x$ を使うこと。
- 長さ L の領域を出たときの荷電粒子の進行方向が y 軸となす角度を求めよ。
- ふれ角度が十分小さいとして、荷電 K 中間子のふれ角に比べ、同じ $1.0\text{GeV}/c$ の運動量で入射した荷電 π 中間子のふれ角はおよそどのくらいになるか。

K 中間子を金属に入射し、その中で完全に停止させる。荷電 K 中間子は 63% が μ 粒子と μ 型ニュートリノに、21% が荷電 π 中間子と中性 π 中間子 (π^0) に二体崩壊する。ここでは π 中間子への崩壊に着目する。

中性 π 中間子は $\tau = 8.4 \times 10^{-17}$ 秒という非常に短い時間に崩壊し、2 つのガンマ線になる。実験室系で見たときの中性 π 中間子の静止座標系の移動速度を \mathbf{v} とする。二つの系間のローレンツ変換は $p' \sin \theta' = p \sin \theta$ および $p' \cos \theta' = p \cos \theta \cdot \gamma - E\gamma\beta/c$ で与えられる。ここで $\beta \equiv \frac{v}{c}$ 、 $\gamma \equiv \frac{1}{1-\beta^2}$ である。 \prime がついたものは重心系、そうではないものは実験室系を表す。 θ および、 θ' はそれぞれの系で粒子の運動方向が静止座標系の移動方向となす角度を表す。

- 中性 π 中間子の進行方向を x 軸にとるとき、2 つのガンマ線が x 軸について対称な方向に等しい運動量の絶対値をもって放出されたとする。このときガンマ線が x 軸となす角度を計算せよ。 β を用いてよい。

上述のように中性 π 中間子の寿命 τ は非常に短い。この寿命をどのように測定するかを考えよう。

- 実験室で中性 π 中間子が飛行中に崩壊する。作られてから崩壊するまでの平均距離が 25 ミクロン程度となるためには、生成された中性 π 中間子のエネルギーはどのようなものでないといけないか。

中性 π 中間子は電磁相互作用をしないが、崩壊生成物であるガンマ線は物質中で対生成を起す。2 枚の金属薄膜を近接しておき、高エネルギー陽子ビームを当てると、薄膜中で中性 π 中間子が作られる。最初の薄膜中で生成された中性 π 中間子は短い距離をとんだ後崩壊し、2 個のガンマ線になる。ガンマ線になると一定の確率で、金属薄

膜中で対生成を起す。図 2 にあるように、一枚目の薄膜中で中性 π 中間子が作られ、薄膜の間で崩壊し、2 枚目の薄膜中で対生成を起すものに着目する。

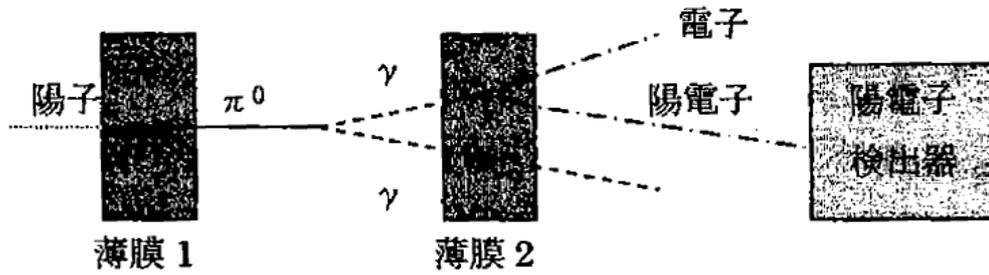


図 2:

7. 対生成で生じた陽電子をビーム進行方向の陽電子検出器で観測する。まず、2 枚の薄膜を再接近させた状態で陽電子を計測し、その後、薄膜間の距離を d だけ増やして計測するよ。このときの陽電子の計測率の変化について説明せよ。
8. 薄膜間の距離の変化に対する感度を最も高くするためには、薄膜の厚さはどうとるべきか考察せよ。

問題 8

図 1 はヒトの眼の断面図である。眼に入射する光は、まず空気と角膜との境界面で屈折し、さらに水晶体の前面と後面で 2 度屈折し、網膜上に像を結ぶ。網膜上で光は電気信号におきかえられ、視覚情報として視神経を通して脳に伝えられる。

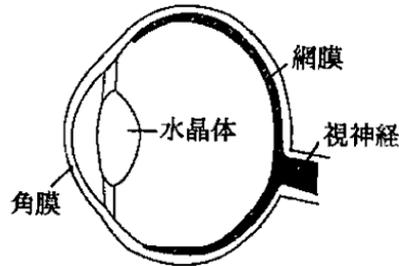


図 1

まず光学機器として眼をとらえよう。ヒトの眼全体で起こる光の屈折の大部分は空気と角膜の境界面で生じている。水晶体における屈折を無視した時の、角膜による像形成 (図 2) を考える。物体 OO' と角膜との距離を p 、角膜と像の形成位置 I との距離を q 、空気中および角膜内の屈折率を n_1 、 n_2 とする。角膜表面を球面の一部とみなし、その中心を C 、半径を r とする。

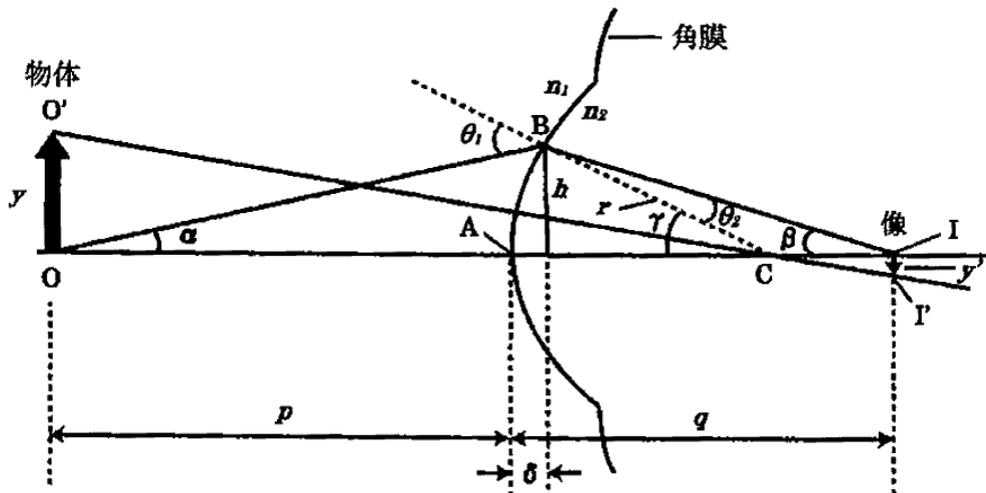


図 2

1. 光線 OBI に着目する。点 B と直線 OI との距離を h とし、図中の角 α ($\angle BOI$)、 β ($\angle BIO$)、 γ ($\angle BCO$) を h 、 p 、 q 、 r で表せ。なお、図中の距離 δ は p 、 q 、 r に比べて無視できるものとし、 α 、 β 、 $\gamma \ll 1$ ラジアンとする。
2. 光線 OBI の入射角、屈折角を θ_1 、 θ_2 とし、 θ_1 、 θ_2 、 n_1 、 n_2 間の関係式を示せ。ただし、 θ_1 、 $\theta_2 \ll 1$ ラジアンとする。
3. 設問 1、2 より n_1 、 n_2 、 p 、 q 、 r 間の関係式を求めよ。
4. 網膜における像の拡大率 $m (= y'/y)$ を n_1 、 n_2 、 p 、 q で表せ。
5. $p = 25\text{cm}$ 、 $p = \infty$ の時、 q の値をそれぞれ有効数字 2 桁で求めよ。ただし、 $n_1 = 1.00$ 、 $n_2 = 1.34$ 、 $r = 0.80\text{cm}$ である。
6. 設問 5 で求めた q の値と角膜と網膜との間の実際の距離 2.5cm を比べることにより、どのようなことが分かるか。水晶体の役割を含め説明せよ。

次に網膜上の像が視神経を介し脳へと投射される過程を考察する。

7. 各視神経は図3の点Aと点A'、点Bと点B'といった具合に、網膜上の特定の点と1次視覚野上の対応する点とを結ぶように配線される。このように各視神経が網膜上での相対的な位置を保ったままで1次視覚野に結合する結果、脳内において網膜上の像が再現される。カエルの視神経が、図3で示すような位置で切断されても再生する能力を持つことを利用し、視神経の正確な配線のパターンが遺伝的に決定されているのか、それとも学習によって獲得されるのかを検討する実験を考案せよ。
8. 実際には視神経の配線は、大部分、遺伝的に決定されていることがわかっている。したがって、各視神経と1次視覚野の特定の位置とを対応づける分子の存在が予想される。もし、このような分子（遺伝子にコードされていると仮定する）が視神経の数だけ必要であるとすると、遺伝子の数が断然不足することになる（視神経の数は100万のオーダーであるのに対し、ヒトの遺伝子の数は数万しかない）。この問題を回避するため生物がとっている戦略について考察せよ。

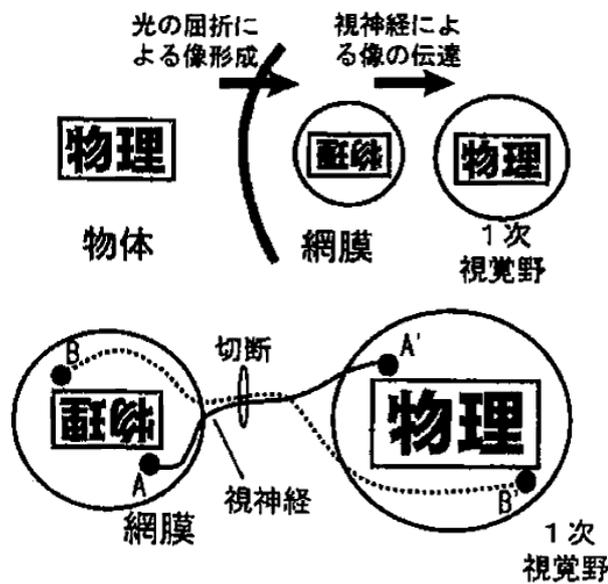


図 3

問題 9

幅 b を持つ矩形ポテンシャル障壁 $V(z)$ による一次元電子の散乱を考える。 $V(z)$ の左 ($z = -\infty$) から入射する電子の波動関数を ψ_l 、右から入射する電子のそれを ψ_r とすると、図 1 の様に $z < -b/2$ 及び $z > b/2$ で

$$\psi_l(z) = \begin{cases} \exp[ikz] + R \exp[-ikz] & z < -b/2 \\ T \exp[ikz] & z > b/2 \end{cases} \quad \dots (1)$$

及び

$$\psi_r(z) = \begin{cases} T \exp[-ikz] & z < -b/2 \\ \exp[-ikz] + R \exp[ikz] & z > b/2 \end{cases} \quad \dots (2)$$

と表される。ただし、 T, R はそれぞれ透過係数及び反射係数であり、 $T = e^{i\alpha} \sin(\gamma)$, $R = ie^{i\alpha} \cos(\gamma)$ の様に位相差 α と散乱振幅に関係した量 γ で表される。また、波数 k は電子のエネルギー E と質量 m を用いて次のように書ける。

$$k = \sqrt{2mE}/\hbar \quad \dots (3)$$

1. 波動関数の一般解 ψ は

$$\psi(z) = \begin{cases} A_{-1} \exp[ikz] + B_{-1} \exp[-ikz] & z < -b/2 \\ A_0 \exp[ikz] + B_0 \exp[-ikz] & z > b/2 \end{cases} \quad \dots (4)$$

の様に書ける (図 2)。一般解が線形独立解 ψ_r, ψ_l の重ね合わせで書ける事を利用して、 A_{-1}, B_{-1} と A_0, B_0 の関係式を導け。また、それを式 (5) の様に行列表示した時の、行列要素を α, γ で表せ。(M は転送行列と呼ばれる。)

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_{-1} \\ B_{-1} \end{pmatrix} \quad \dots (5)$$

図 1

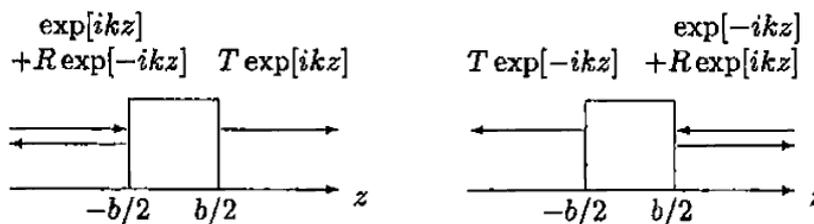
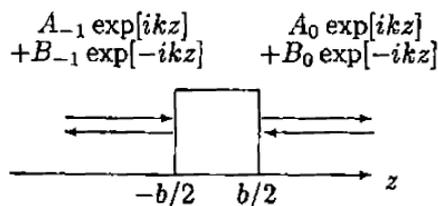
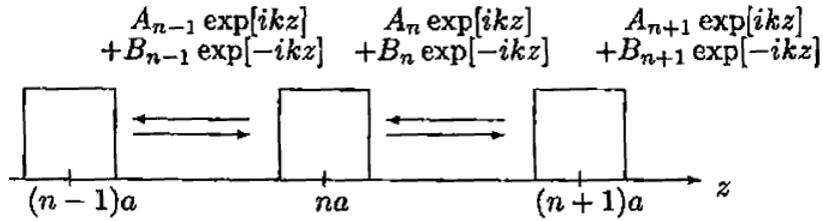


図 2



次に $V(z)$ が間隔 $a (> b)$ で等間隔に並んでいる時 (すなわち一次元周期系) の電子状態を考える。図 3 のように波動関数 Ψ は $na < z < (n+1)a$ かつポテンシャルがゼロになる領域で $A_n \exp[ikz] + B_n \exp[-ikz]$ と書ける。今、

図 3



$-a + b/2 < z < a - b/2$ に注目し、 Ψ がこの領域で線形独立解 ψ_r, ψ_l の重ね合わせで書ける事を利用すると、ここでも式 (5) が成り立つ事、また一般に以下の関係が成り立つ事がわかる。

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{pmatrix} \quad \dots (6)$$

2. 周期系の波動関数 Ψ はブロッホ条件 $\Psi(z + a) = \exp[iqa]\Psi(z)$ を満たす事が知られている。この条件を用いて A_n, B_n が満たすべき関係式を示せ。ただし、 q はブロッホ波数である。(波数 k は式 (3) によって定義されるエネルギーの関数であり、ブロッホ波数 q とは直接関係するものではない事に留意せよ。)
3. ブロッホ条件と式 (6) が同時に成り立つ時、 q と k は次の式で関係付けられる事を示せ。

$$\cos(qa) = \frac{\cos(ka + \alpha)}{\sin(\gamma)} \quad \dots (7)$$

次に、 α, γ が波数 k を介して

$$\gamma = \frac{\pi k}{2 k_c}, \quad \alpha = -c \frac{k}{k_c} \quad \dots (8)$$

の様にエネルギーに依存している場合を考える。ただし、 k_c, c は定数であり、 $\pi/2 < k_c a - c$ を満たす。以下、 $0 < k < k_c$ で示されるエネルギー範囲で考えよ。

4. 式 (7) の右辺の値を波数 k の関数としてプロットせよ。
5. $ka + \alpha$ が π の整数倍の時、式 (7) を満たす実数の q が存在しない事を示し、その物理的意味を述べよ。
6. 実数の q が存在するための k の条件を k_c, c, a を用いて示せ。
7. $k_c a - c = 5\pi/2$ の場合、 q と E の関係式 (すなわち分散関係) の概略図を示せ。

問題 1 解答

1. まず、 a と a^\dagger の交換関係を求める。

$$[a, a^\dagger] = \frac{m\omega}{2\hbar} \left\{ \left(\mathbf{x} + i \frac{\mathbf{p}}{m\omega} \right) \left(\mathbf{x} - i \frac{\mathbf{p}}{m\omega} \right) - \left(\mathbf{x} - i \frac{\mathbf{p}}{m\omega} \right) \left(\mathbf{x} + i \frac{\mathbf{p}}{m\omega} \right) \right\} \quad \dots (1)$$

$$= \frac{i}{\hbar} [\mathbf{p}, \mathbf{x}] \quad \dots (2)$$

ここで、 $\mathbf{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ より、 $[\mathbf{p}, \mathbf{x}] = -i\hbar$ であるから、

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad \dots (3)$$

N と a^\dagger の交換関係は

$$\begin{aligned} [N, a^\dagger] &= Na^\dagger - a^\dagger N \\ &= a^\dagger aa^\dagger - a^\dagger a^\dagger a \\ &= a^\dagger (aa^\dagger - a^\dagger a) \\ &= a^\dagger [a, a^\dagger] \end{aligned} \quad \dots (4)$$

昇降演算子の交換関係は $[a, a^\dagger] = 1$ だから

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger \quad \dots (5)$$

N と a の交換関係は

$$\begin{aligned} [N, a] &= Na - aN \\ &= a^\dagger aa - aa^\dagger a \\ &= a [a^\dagger, a] \end{aligned} \quad \dots (6)$$

昇降演算子の交換関係は $[a, a^\dagger] = 1$ だから

$$[N, a] = -a \quad \dots (7)$$

2. まず $a^\dagger |n\rangle = C|n+1\rangle$ であることを示す。

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad \dots (8)$$

において $|n\rangle$ の左から演算子 a^\dagger を作用させると

$$\begin{aligned} Na^\dagger &= a^\dagger aa^\dagger |n\rangle \\ &= a^\dagger (a^\dagger a + 1) |n\rangle \\ &= a^\dagger (n+1) |n\rangle \\ &= (n+1) a^\dagger |n\rangle \end{aligned} \quad \dots (9)$$

一方 $|n+1\rangle$ も同じ固有値 $(n+1)$ を持つ演算子 N の固有関数なので $a^\dagger |n\rangle$ と $|n+1\rangle$ は定数倍すると一致する関係であり

$$a^\dagger |n\rangle = C|n+1\rangle \quad \dots (10)$$

と書くことができる。C は次のようにして求められる。すなわち、

$$\langle n|aa^\dagger|n\rangle = \langle n|N+1|n\rangle = n+1 \quad \dots (11)$$

$$= |C|^2 \langle n+1|n+1\rangle = |C|^2 \quad \dots (12)$$

よって $C = \sqrt{n+1}$ である。

次に $a|n\rangle = D|n-1\rangle$ であることを示す。

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad \dots (13)$$

において $|n\rangle$ の右から演算子 a を作用させると

$$\begin{aligned} Na|n\rangle &= a^\dagger a a|n\rangle \\ &= (a a^\dagger - 1)a|n\rangle \\ &= a n|n\rangle - a|n\rangle \\ &= (n-1)a|n\rangle \end{aligned} \quad \dots (14)$$

一方 $|n-1\rangle$ も同じ固有値 $(n-1)$ を持つ演算子 N の固有関数なので $a|n\rangle$ と $|n-1\rangle$ は定数倍すると一致する関係であり

$$a|n\rangle = D|n-1\rangle \quad \dots (15)$$

と書くことができる。D は次のようにして求められる。すなわち、

$$\langle n|a^\dagger a|n\rangle = \langle n|N|n\rangle = n \quad \dots (16)$$

$$= |D|^2 \langle n-1|n-1\rangle = |D|^2 \quad \dots (17)$$

よって $D = \sqrt{n}$ である。

3. 与えられたハミルトニアン演算子は

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) \quad \dots (18)$$

と書き換えることができるのでこの演算子の固有値方程式は

$$H|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|n\rangle \quad \dots (19)$$

となる。いま、

$$\begin{aligned} [a, H] &= \hbar\omega[a, a^\dagger a] \\ &= \hbar\omega(a^\dagger [a, a] + [a, a^\dagger]a) \\ &= \hbar\omega a \end{aligned} \quad \dots (20)$$

$$\begin{aligned} [a^\dagger, H] &= \hbar\omega[a^\dagger, a^\dagger a] \\ &= -\hbar\omega a^\dagger \end{aligned} \quad \dots (21)$$

演算子 H の固有値を E とし、 $|n\rangle$ に対して (17)、(18) を作用させると、

$$H(a|n\rangle) = (E - \hbar\omega)(a|n\rangle) \quad \dots (22)$$

$$H(a^\dagger|n\rangle) = (E + \hbar\omega)(a^\dagger|n\rangle) \quad \dots (23)$$

$a|n\rangle$ と $a^\dagger|n\rangle$ はそれぞれ固有値 $E - \hbar\omega$ 、 $E + \hbar\omega$ に属する固有関数だから a または a^\dagger を n 回 $|n\rangle$ に作用させて $a^n|n\rangle$ または $(a^\dagger)^n|n\rangle$ とすればそれぞれは $E \mp n\hbar\omega$ に属する固有関数である。

さて、 $|a|n\rangle|^2 = \langle n|a^\dagger a|n\rangle \geq 0$ なので

$$\langle a | (\frac{1}{\hbar\omega} H - \frac{1}{2}) |n\rangle = \frac{1}{\hbar\omega} E - \frac{1}{2} \geq 0$$

となる。よって、 $E \geq \frac{1}{2}\hbar\omega$ 。

これらより、 n はゼロまたは正の整数である。

4. 時間に依存するシュレディンガー方程式は、

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(x, t) = H\Psi(x, t) \quad \dots (24)$$

このことより、形式的に、

$$\Psi(x, t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t} \Psi(x, 0) \quad \dots (25)$$

と書くことができる。このとき、 A という物理量の期待値 $\langle A \rangle$ は

$$\langle A \rangle = \langle \Psi(x, t) | A | \Psi(x, t) \rangle \quad \dots (26)$$

$$= \langle \Psi(x, 0) | e^{i\frac{H}{\hbar}t} A e^{-i\frac{H}{\hbar}t} | \Psi(x, 0) \rangle \quad \dots (27)$$

同様に、時間に依存する位置演算子 $\mathbf{x}(t)$ は

$$\mathbf{x}(t) = \exp\left(-\frac{1}{i\hbar}H(t-t_0)\right) \mathbf{x} \exp\left(\frac{1}{i\hbar}H(t-t_0)\right) \quad \dots (28)$$

と表されるから、この両辺を微分することによって

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{x}(t), H] \quad \dots (29)$$

となる。時間に依存する運動量演算子もこれと同様にして、

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{p}(t), H] \quad \dots (30)$$

5. ハイゼンベルグ表示でハミルトニアン H は

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}(t)^2 + \frac{m\omega^2}{2} \mathbf{x}(t)^2 \quad \dots (31)$$

ここで、

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}(t)^2, H] &= \frac{1}{2m} [\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)^2] \\ &= \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p}(t) [\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)] + [\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)] \mathbf{p}(t) \right) \\ &= \frac{1}{m} i\hbar \mathbf{p}(t) \end{aligned} \quad \dots (32)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{p}(t)^2, H] &= \frac{m\omega^2}{2} [\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t)^2] \\ &= \frac{m\omega^2}{2} \left(\mathbf{x}(t) [\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t)] + [\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t)] \mathbf{x}(t) \right) \\ &= -m\omega^2 i\hbar \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad \dots (33)$$

であるから、 $\mathbf{x}(t)$ および $\mathbf{p}(t)$ のハイゼンベルグ方程式は

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \frac{1}{m} \mathbf{p}(t) \quad \dots (34)$$

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = -m\omega^2 \mathbf{x}(t) \quad \dots (35)$$

と書ける。

(34) および (35) より

$$\frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = -\omega^2 \mathbf{x}(t) \quad \dots (36)$$

初期条件は演算子の定義式 (28) において $t = 0$ を代入して $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$ 、 $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}$ (ハイゼンベルグ表示の演算子の $t = 0$ における演算子はシュレディンガー表示の演算子に等しい)。これを用いて (36) を解くと、

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} \cos(\omega t) + \mathbf{p} \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t) \quad \dots (37)$$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p} \cos(\omega t) - \mathbf{x} m\omega \sin(\omega t) \quad \dots (38)$$

であるので、 $\mathbf{x}(t)$ と $\mathbf{p}(t)$ は古典解と類似の時間変動をすることが分かる。

6. 定義式より、

$$\mathbf{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \quad \dots (39)$$

$$\mathbf{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a - a^\dagger) \quad \dots (40)$$

より、 $\langle n|\mathbf{x}|n \rangle = \langle n|\mathbf{p}|n \rangle = 0$ だから

$$\begin{aligned} \langle n|\mathbf{x}(t)|n \rangle &= \langle n|\mathbf{x} \cos(\omega t)|n \rangle + \langle n|\mathbf{p} \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t)|n \rangle \\ &= \cos(\omega t) \langle n|\mathbf{x}|n \rangle + \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t) \langle n|\mathbf{p}|n \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad \dots (41)$$

$$= 0 \quad \dots (42)$$

$$\begin{aligned} \langle n|\mathbf{p}(t)|n \rangle &= \langle n|\mathbf{p} \cos(\omega t)|n \rangle + \langle n|-\mathbf{x} m\omega \sin(\omega t)|n \rangle \\ &= \cos(\omega t) \langle n|\mathbf{p}|n \rangle - m\omega \sin(\omega t) \langle n|\mathbf{x}|n \rangle = 0 \end{aligned} \quad \dots (43)$$

$$= 0 \quad \dots (44)$$

となる。

7. $|\lambda \rangle = e^{\lambda a^\dagger} |0 \rangle$ のコヒーレント状態を考える。ここで λ は複素数である。

このとき、(37) より

$$\langle \lambda|\mathbf{x}(t)|\lambda \rangle = \langle \lambda|\mathbf{x}|\lambda \rangle \cos(\omega t) + \langle \lambda|\mathbf{p}|\lambda \rangle \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t) \quad \dots (45)$$

ここで、

$$\langle \lambda|\mathbf{x}|\lambda \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \lambda|(a + a^\dagger)|\lambda \rangle \quad \dots (46)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \{ \langle \lambda|a|\lambda \rangle + \langle \lambda|a^\dagger|\lambda \rangle \} \quad \dots (47)$$

となるが、ここでコヒーレント状態は以下のように展開できるから、

$$|\lambda \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (a^\dagger)^n}{n!} |0 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} |n \rangle \quad \dots (48)$$

これを利用して、

$$a|\lambda \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{\sqrt{n!}} |n \rangle = \lambda|\lambda \rangle \quad \dots (49)$$

$$\langle \lambda|a^\dagger = \lambda^* \langle \lambda| \quad \dots (50)$$

とできる。したがって、

$$\langle \lambda|\mathbf{x}|\lambda \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \{ \lambda \langle \lambda|\lambda \rangle + \lambda^* \langle \lambda|\lambda \rangle \} = \langle \lambda|\lambda \rangle \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\lambda + \lambda^*) \quad \dots (51)$$

同様に、

$$\langle \lambda | \mathbf{p} | \lambda \rangle = -i \langle \lambda | \lambda \rangle \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (\lambda - \lambda^*) \quad \dots (52)$$

これらの値は単なる定数なので、(37) と (38) をコヒーレント状態 $|\lambda\rangle$ で期待値を出せば、古典解と同様の振動を意味することが示される。したがって $F(a, a^\dagger)$ の具体例は

$$F(a, a^\dagger) = e^{\lambda a^\dagger} \quad \dots (53)$$

である。

第 2 問 解答

1. 熱力学的重率とは、指定された値に対して可能な量子状態数であるので

$$W(N_\alpha, N_\beta) = \frac{N!}{N_\alpha! N_\beta!} \quad \dots (1)$$

2. エントロピー S は、Stirling の公式を用いて、

$$S = k_B \log W = k_B [N \log N - (N_\alpha \log N_\alpha) - (N_\beta \log N_\beta)] = -k_B \left(N_\alpha \log \frac{N_\alpha}{N} + N_\beta \log \frac{N_\beta}{N} \right) \quad \dots (2)$$

3. δE が小さい場合、

$$\Omega(E) \delta E = W \quad \dots (3)$$

となるので、

$$p(E_l) \propto \exp \left[\frac{S(E_T - E_l) - S(E_T)}{k_B} \right] \quad \dots (4)$$

熱浴は十分大きいので $E_T \gg E_l$ 、これをふまえて $S(E_T - E_l) - S(E_T)$ を展開すると、

$$S(E_T - E_l) - S(E_T) = -E_l \left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_{E=E_T} + \frac{1}{2} E_l^2 \left. \frac{\partial^2 S}{\partial E^2} \right|_{E=E_T} + \dots \quad \dots (5)$$

オーダーで考えれば、第二項以降は第一項に E_l/E_T をかけたものと同程度の大きさしかなく、第一項に比べて無視できるので、 $T = (\partial S / \partial E)^{-1}|_{E=E_T}$ も用いて

$$P(E_l) \propto \exp(-E_l/k_B T) \quad \dots (6)$$

4. $\beta = 1/k_B T$ として、

$$Z_1 = e^{-\beta\epsilon} + e^{\beta\epsilon} = 2 \cosh \beta\epsilon \quad \dots (7)$$

$$Z_N = Z_1^N = (2 \cosh \beta\epsilon)^N \quad \dots (8)$$

- 5.

$$F = -k_B T \log Z_N = -N k_B T \log(2 \cosh \beta\epsilon) \quad \dots (9)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = N k_B \left[\log(2 \cosh \beta\epsilon) - \frac{\epsilon}{k_B T} \tanh \beta\epsilon \right] \quad \dots (10)$$

$$E = F + TS = -N \epsilon \tanh \beta\epsilon \quad \dots (11)$$

- 6.

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = N k_B (\beta\epsilon)^2 \frac{1}{\cosh^2 \beta\epsilon} \quad \dots (12)$$

関数形は $y = C/Nk_B$, $x = k_B T/\epsilon$ として

$$y = \frac{1}{x^2 \cosh^2(\frac{1}{x})} \quad \dots (13)$$

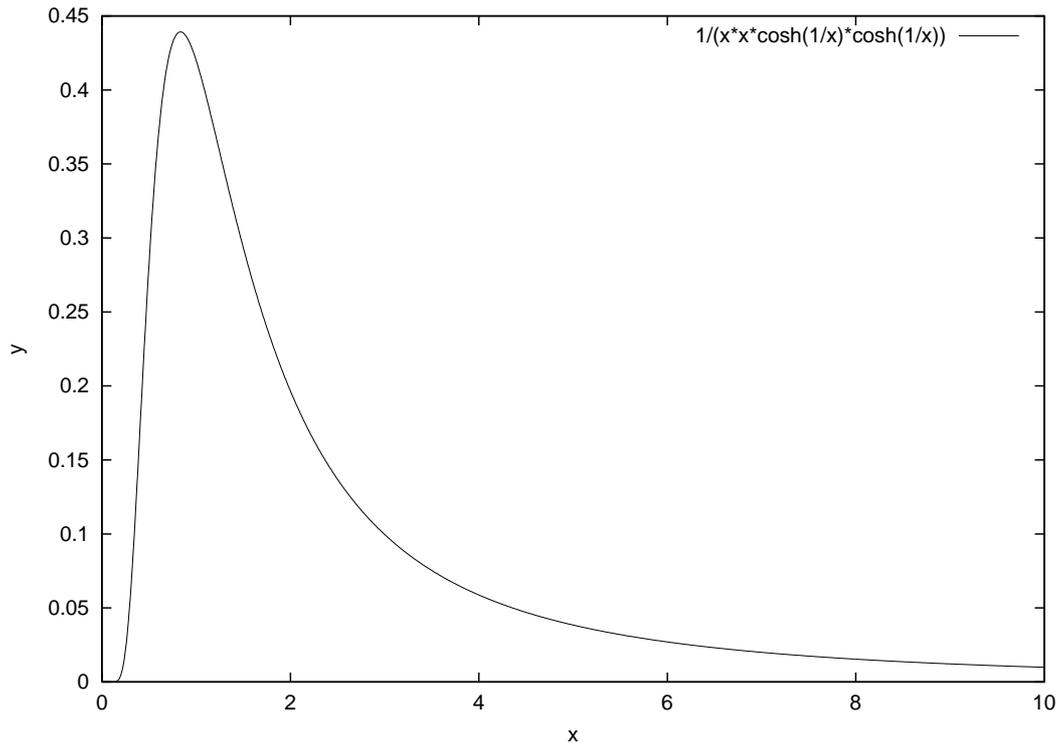


図 3:

7. 2 番と同様に

$$p(E_L, L) \propto \exp \left[\frac{S(E_T - E_L, L_T - L) - S(E_T, L_T)}{k_B} \right] \quad \dots (14)$$

$E_T \gg E_L, L_T \gg L$ より $S(E_T - E_L, L_T - L) - S(E_T, L_T)$ を展開すると、

$$\begin{aligned} S(E_T - E_L, L_T - L) - S(E_T, L_T) &= -E_L \left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_{E=E_T} - L \left. \frac{\partial S}{\partial L} \right|_{L=L_T} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(E_L^2 \left. \frac{\partial^2 S}{\partial E^2} \right|_{E=E_T} + 2E_L L \left. \frac{\partial^2 S}{\partial E \partial L} \right|_{E=E_T, L=L_T} + L^2 \left. \frac{\partial^2 S}{\partial L^2} \right|_{L=L_T} \right) + \dots \end{aligned}$$

オーダーで考えると、第二項以降は第一項に $E_L/E_T, L/L_T$ をかけたもの程度の大きさしかなく、第一項に比べて無視できるので、 $T = (\partial S / \partial E)^{-1}|_{E=E_T}$ と $TdS = dE - XdL$ も用いると、

$$S(E_T - E_L, L_T - L) - S(E_T, L_T) = \frac{-E_L + XL}{T} \quad \dots (15)$$

$$\therefore p(E_L, L) \propto \exp \left\{ \frac{1}{k_B T} (-E_L + XL) \right\} \quad \dots (16)$$

8. $L(N_\alpha, N_\beta) = N_\alpha a + N_\beta b, E_L(N_\alpha, N_\beta) = N_\alpha \epsilon - N_\beta \epsilon$ と、二項定理 $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = (a+b)^n$ を用いて、

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{N_\alpha=0}^N \frac{N!}{N_\alpha! N_\beta!} e^{\beta(-E_L + XL)} \\ &= \sum_{N_\alpha=0}^N \frac{N!}{N_\alpha! (N - N_\alpha)!} \left[e^{\beta(aX - \epsilon)} \right]^{N_\alpha} \left[e^{\beta(bX + \epsilon)} \right]^{N - N_\alpha} \\ &= \left[e^{\beta(aX - \epsilon)} + e^{\beta(bX + \epsilon)} \right]^N \end{aligned}$$

9.

$$G = -k_B T \log Y = -Nk_B T \log \left[e^{\beta(aX - \epsilon)} + e^{\beta(bX + \epsilon)} \right] \quad \dots (17)$$

また、 $G = F - XL$, $dG = -SdT - LdX$ より、

$$L = -\frac{\partial G}{\partial X} = \frac{N \left[a e^{\beta(aX - \epsilon)} + b e^{\beta(bX + \epsilon)} \right]}{e^{\beta(aX - \epsilon)} + e^{\beta(bX + \epsilon)}} \quad \dots (18)$$

問題 3 解答

1. 磁場の中の荷電粒子は進行方向と垂直な方向に $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ の力を受ける。最初は相対論効果を考えなくてもよい場合を考える。

磁場は仕事をしないので荷電粒子の速さは一定であり、進行方向と垂直に一定の力が働き続けるので、 xy 平面内で円運動を行う。運動方程式は

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{qB}{m} \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix} \quad \dots (1)$$

である。この方程式は v_x, v_y それぞれについての線形 2 階同次微分方程式に変形することができ、

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x, \quad \frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y \quad \dots (2)$$

により、解は三角関数の線形重ね合わせ $v_{x,y} = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$ となる。ここに $\omega = qB/m$ と定める。 $v_x(0) = v_0, v_y(0) = 0$ を代入することにより、

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad \dots (3)$$

となる。時間について積分を行って初期条件を代入することにより、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{mv_0}{qB} \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) - 1 \end{pmatrix} \quad \dots (4)$$

となる。

2. 運動方程式 (1) は変更されて、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{q}{m} \begin{pmatrix} -E \sin(\Omega t) + v_y B \\ -E \cos(\Omega t) - v_x B \end{pmatrix} \quad \dots (5)$$

となる。1. と同じように 2 階の微分方程式に変形すると今度は非同次となり、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[-\frac{qE}{m} \sin(\Omega t) + \frac{qB}{m} v_y \right] = -\frac{qE\Omega}{m} \cos(\Omega t) + \frac{qB}{m} \left[-\frac{qE}{m} \cos(\Omega t) - \frac{qB}{m} v_x \right] \\ &= -\frac{qE}{m} \left(\Omega + \frac{qB}{m} \right) \cos(\Omega t) - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 v_x \end{aligned} \quad \dots (6)$$

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = \frac{qE}{m} \left(\Omega + \frac{qB}{m} \right) \sin(\Omega t) - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 v_y \quad \dots (7)$$

となる。 v_x に関する 2 階非同次線形微分方程式を解くことを考える。定数変化法を用いればよい。すなわち同次方程式 (2) の第 1 式の一般解は

$$v_x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \quad \dots (8)$$

であった。今はこれに非同次項 $\varphi(t) = -\frac{qE}{m} \left(\Omega + \frac{qB}{m} \right) \sin(\Omega t)$ が加わっているだけである。定数変化法の精神は (6) の特殊解として C_1, C_2 の代わりに t 依存の変数に置き換えたものを持ってきて、問題の微分方程式を満たすものをひとつ見つけることである。これがみつければ後は元の非同次項のない微分方程式の一般解 (3) に足すだけで一般解が求まる。

$$v_x = c_1(t) \cos(\omega t) + c_2(t) \sin(\omega t) \quad \dots (9)$$

すると、

$$\frac{dv_x}{dt} = c'_1 \cos(\omega t) + c'_2 \sin(\omega t) - c_1 \omega \sin(\omega t) + c_2 \omega \cos(\omega t) \quad \dots (10)$$

となる。定数 c_1, c_2 を

$$c'_1 \cos(\omega t) + c'_2 \sin(\omega t) = 0 \quad \dots (11)$$

となるように選ぶと、

$$\frac{dv_x}{dt} = -c_1 \omega \sin(\omega t) + c_2 \omega \cos(\omega t) \quad \dots (12)$$

となる。さらに微分して、

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -c'_1 \omega \sin(\omega t) + c'_2 \omega \cos(\omega t) - c_1 \omega^2 \cos(\omega t) - c_2 \omega^2 \sin(\omega t) \quad \dots (13)$$

問題の微分方程式に代入すると、

$$-c'_1 \omega \sin(\omega t) + c'_2 \omega \cos(\omega t) = -\frac{qE}{m} (\Omega + \omega) \cos(\Omega t) \quad \dots (14)$$

となる。(11),(14) から

$$c'_1(t) = \frac{qE}{m\omega} (\Omega + \omega) \cos(\Omega t) \sin(\omega t) \quad \dots (15)$$

$$c'_2(t) = -\frac{qE}{m\omega} (\Omega + \omega) \cos(\Omega t) \cos(\omega t) \quad \dots (16)$$

と解かれ、これらを積分して (9) 式に代入することにより、

$$v_x(t) = -\frac{qE}{m\omega} (\Omega + \omega) \cos(\omega t) \left[\frac{\cos(\Omega + \omega)t}{2(\Omega + \omega)} - \frac{\cos(\Omega - \omega)t}{2(\Omega - \omega)} \right] - \frac{qE}{m\omega} (\Omega + \omega) \sin(\omega t) \left[\frac{\sin(\Omega + \omega)t}{2(\Omega + \omega)} + \frac{\sin(\Omega - \omega)t}{2(\Omega - \omega)} \right] \quad \dots (17)$$

という特殊解が求まる。従って、一般解は

$$v_x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) - \frac{qE}{m\omega} (\Omega + \omega) \cos(\omega t) \left[\frac{\cos(\Omega + \omega)t}{2(\Omega + \omega)} - \frac{\cos(\Omega - \omega)t}{2(\Omega - \omega)} \right] - \frac{qE}{m\omega} (\Omega + \omega) \sin(\omega t) \left[\frac{\sin(\Omega + \omega)t}{2(\Omega + \omega)} + \frac{\sin(\Omega - \omega)t}{2(\Omega - \omega)} \right] \quad \dots (18) \\ = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{qE}{m(\Omega - \omega)} \cos(\Omega t)$$

と求まる。初期条件は $v_x(0) = v_0, v'_x(0) = 0$ (i.e. $v_y(0) = 0$) なので、 $C_1 = v_0, C_2 = -c_2(0) = 0$ となる。以上から、

$$v_x(t) = \left(v_0 - \frac{qE}{m(\Omega - \omega)} \right) \cos(\omega t) + \frac{qE}{m(\Omega - \omega)} \cos(\Omega t) \quad \dots (19)$$

と求まる。同様にして v_y も

$$v_y(t) = -\left(v_0 - \frac{qE}{m(\Omega - \omega)} \right) \sin(\omega t) - \frac{qE}{m(\Omega - \omega)} \sin(\Omega t) \quad \dots (20)$$

と分かる。

3. $\Omega = \omega = \frac{qB}{m}$ の場合には、例えば (15)(16) 式の箇所から解き直さなくてはならない。この場合に (15)(16) を積分し特殊解を求めると、

$$v_x(t) = -\frac{qE}{m} \left[\frac{1}{2\omega} \cos(\omega t) + t \sin(\omega t) \right] \quad \dots (21)$$

これを同次方程式の一般解 $v_x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ に付け加える際に、第 1 項は係数 C_1 に込めてしまうことができる。これを考慮した上で初期条件を適用すると v_x の解は

$$v_x(t) = v_0 \cos(\omega t) - \frac{qE}{m} t \sin(\omega t) \quad \dots (22)$$

となる。同じ様にして v_y の解は

$$v_y(t) = -v_0 \sin(\omega t) - \frac{qE}{m} t \cos(\omega t) \quad \dots (23)$$

である。以上より、運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2) = \frac{m}{2}v_0^2 + \frac{q^2 E^2}{2m} t^2 \quad \dots (24)$$

となり、時間の 2 乗に比例して増加することが分かる。

4. 運動方程式に相対論的補正を加えた場合、 γ ファクターが運動量にかかるため、

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \right] = \frac{qB}{m} \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix} \quad \dots (25)$$

となる。 \vec{v} との内積を取ると右辺が消えるので、

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \dots (26)$$

である。両辺に $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$ をかけて整理すると、

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \right]^2 = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{v^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \text{time independent} \quad \dots (27)$$

であることが分かる。すなわち、速さ v は時間によらず一定である。

5. 以上より、運動方程式 (1) において γ は時間微分の外に出すことができるので、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{qB}{m\gamma} \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix} \quad \dots (28)$$

となる。あとは 1. 番と全く同様に解くことができ、

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = -v_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad \text{where } \omega = \frac{qB}{m\gamma} \quad \dots (29)$$

である。

6. 最初は非相対論的に運動を開始し、3. 番で求めたように速さが増加してゆく時間発展を取る。速さが増加して γ が無視できなくなってくる (相対論的) と運動方程式 (28) で速さの変化が押さえられてゆく。そのとき、回転周期 ω が電場の周期 Ω からずれるために、粒子の振舞は 3. 番のようなエネルギー増加の挙動から、2. 番のようなエネルギーが平均的に一定の振舞いに切り替わる。その時点で運動エネルギーの正味の増加は抑えられてしまうことになる。

【別解】 .

1. 運動方程式 (1) について、 $w = v_x + iv_y$ を考えることによって、問題を 1 階の微分方程式に落とすことができる。

$$\frac{dw}{dt} = -i \frac{qB}{m} w \quad \dots (30)$$

これに初期条件 $w(0) = v_0$ を適用すると解として $w(t) = v_0 e^{-i\omega t}$ が求まる ($\omega = \frac{qB}{m}$)。

2. 上と同様に行うと運動方程式 (5) は

$$\frac{dw}{dt} = -i \frac{q}{m} (E e^{-i\Omega t} + Bw) \quad \dots (31)$$

となる。やはり定数変化法を用いてこれを解く。同次方程式である (30) 式の定数部分を変化させたものとして、 $w(t) = C(t) e^{-i\omega t}$ を考え、これを (31) 式に代入すると、

$$C'(t) e^{-i\omega t} = -i \frac{qE}{m} e^{-i\Omega t} \quad \dots (32)$$

が求まる。よって、

$$C(t) = \frac{qE}{m(\Omega - \omega)} e^{-i(\Omega - \omega)t} \quad \text{i.e.} \quad w(t) = \frac{qE}{m(\Omega - \omega)} e^{-i\Omega t} \quad \dots (33)$$

という $w(t)$ の特殊解が得られ、これを同次方程式の一般解に足すことで $w(t)$ の一般解となる。初期条件を適用して実部虚部を分離すると、(20) 式と同じ式が得られる。

2 元ベクトルを残したまま 1 階非同次線形微分方程式の解き方を敷衍しても、同等の解答が得られ、また同じように簡潔である。

問題 4 解答

1. 粒子の Lagrangian は、

$$\begin{aligned} L &= \frac{p^2}{2m} - U(r) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r) \end{aligned}$$

と書ける。これを以下の Euler-Lagrange 方程式に代入すると、

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0$$

したがって、角運動量 $mr^2\dot{\phi}$ が保存されることが示された。

2. 無限遠での探査機の角運動量は mvb であるから、1 で得られた角運動量の保存則より、

$$mr^2\dot{\phi} = mvb$$

$$\dot{\phi} = \frac{vb}{r^2}$$

3. 1 の Lagrangian を以下の Euler-Lagrange 方程式に代入すると、 $\dot{\phi} = \frac{vb}{r^2}$ を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= 0 \\ mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{d}{dt}(m\dot{r}) &= 0 \\ m\frac{v^2b^2}{r^3} - \frac{GMm}{r^2} - m\ddot{r} &= 0 \end{aligned}$$

という式が成り立つ。これは下のよう書き換えられる。

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= m\frac{v^2b^2}{r^3} - \frac{GMm}{r^2} \\ &= -\frac{d}{dr}\left(\frac{mv^2b^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r}\right) \end{aligned}$$

ここで、上の式の右辺を $-\frac{d}{dr}\tilde{U}(r)$ とすれば、 $\tilde{U}(r)$ は有効ポテンシャルとなる。無限遠で探査機のもつエネルギーは、 $\frac{1}{2}mv^2$ であるから、

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{mv^2b^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r}$$

の解が r_0 となる。これを解くと、

$$r_0 = \frac{-GM + \sqrt{G^2M^2 + v^4b^2}}{v^2}$$

となる。

4. x 方向の力について考える。
重力の方向の x 方向の力は、

$$-\frac{d}{dr}\left(-\frac{GMm}{r}\right)\cos\phi = -\frac{GMm}{r^2}\cos\phi$$

となるから、以下の式が成り立つ。

$$m\ddot{x} = -\frac{GMm}{r^2}\cos\phi$$

ここで、 $\dot{x} = v_x$ と書くと、

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\frac{GMm}{r^2} \cos \phi$$

両辺に $\frac{dt}{d\phi} = \frac{1}{\dot{\phi}}$ をかけると、

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{d\phi} &= -\frac{GM}{r^2 \dot{\phi}} \cos \phi \\ &= -\frac{GM}{vb} \cos \phi \end{aligned}$$

したがって、

$$dv_x = -\frac{GM}{vb} \cos \phi d\phi$$

が示された。

5. (2) の両辺を積分すると、

$$v_x \Big|_{\text{入射前}}^{\text{出射後}} = -\frac{GM}{vb} \sin \phi \Big|_{\text{入射前}}^{\text{出射後}}$$

ここで、左辺の変化について考えると、 $2v \sin \frac{\theta}{2}$ となる。また、右辺は入射前の無限速で $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ 、出射後の無限速で $\phi \rightarrow -\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$ となることより、以下の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} 2v \sin \frac{\theta}{2} &= \frac{GM}{vb} \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) \right\} \\ &= \frac{GM}{vb} 2 \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

これをまとめると、

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{GM}{v^2 b}$$

が示される。

6. 前提として、惑星の運動量は変化は考えるが、速度単体の変化は微小なため、無視するものとする。

このとき、惑星の静止系で見ると、探査機は双曲線軌道を描くので、入射速度と出射速度が等しくなる。これを式で書くと、

$$|\vec{v} - \vec{W}| = |\vec{u} - \vec{W}|$$

両辺を 2 乗してまとめると、

$$|\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 2(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{W}$$

したがって、入射前後における探査機のエネルギー変化は、

$$\frac{1}{2} m |\vec{u}|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 = m(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{W}$$

と得られる。

7. 太陽の静止系で見た探査機の世界速度ベクトルの変化 ($\vec{u} - \vec{v}$) は、惑星の静止系で見た速度ベクトルの変化 ($(\vec{u} - \vec{W}) - (\vec{v} - \vec{W})$) に等しい。このとき、入射速度ベクトルによって、 $\vec{u} - \vec{v}$ の方向は変わるが、それを上手く選んでやれば、 $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{W} > 0$ とすることができる。この条件下で、6. で求めた入射前後における探査機のエネルギー変化が正となるので、探査機は加速可能なのである。

次に、そのエネルギー変化量の起源は、惑星の公転エネルギーである。以下でそれを示す。

まず、運動量保存の法則より、探査機出射後の惑星の運動量を \vec{W}' とすると、

$$m\vec{v} + M\vec{W} = m\vec{u} + M\vec{W}'$$

と書ける。したがって、

$$\vec{W}' = \vec{W} + \frac{m}{M}(\vec{v} - \vec{u})$$

これを用いて、惑星の運動エネルギーの変化量 $\frac{1}{2}M(|\vec{W}'|^2 - |\vec{W}|^2)$ を求めると、

$$\frac{1}{2}M(|\vec{W}'|^2 - |\vec{W}|^2) = -m(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{W}$$

と得られる。ちなみに、この計算において、 $(\frac{m}{M})^2$ の項は微小であるので無視した。これは、6. で求めた探査機の運動エネルギー変化の符号を変えたものに等しい。つまり、惑星が失ったエネルギーを探査機が受け取ったのである。したがって、探査機得たエネルギーの源が惑星の公転の運動エネルギーであることが示された。

問題 5 解答

1. ●光電吸収

光電吸収とは、入射ガンマ線光子が原子に束縛された電子と相互作用して全てのエネルギーを失い消失し、その電子が原子から飛び出す現象である。この場合入射光子エネルギー $h\nu$ からもとの殻の電子の結合エネルギー E_b を差し引いた値の運動エネルギーを持つ光電子が吸収原子の電子殻の一つから作られる。光子が物質の原子によって吸収されるのは、原子の束縛電子によるものであって、自由電子による吸収は起こらない。運動量保存則よりこの過程で原子が反跳するが、反跳エネルギーは大変小さいので通常は無視できる。光電効果の起こる確率は、結合エネルギーが大きいほど、すなわち束縛電子と核との結びつきが強いほど大きい。これは、 $h\nu$ の光子の吸収では、電子の得る運動エネルギー E が、 $E = h\nu - E_b$ と表されることから分かるように、 E_b の大きい電子ほど飛び出す運動エネルギーが小さく、核に与える運動量が小さいからである。 K 電子の結合エネルギーより大きい場合は光電効果の 80% 以上が K 電子によるものとなり、また K 電子の結合エネルギー以下では K 電子による光電効果は起きない。他の殻についても同様であることから、各結合のエネルギーに相当する光子のところで吸収端を持つことになり、光電効果断面積は光子のエネルギーが小さくなるに従って不連続に増加する。一般的に光電効果断面積はシンチレーションカウンターの原子番号 Z の 5 乗に比例して増大し、低エネルギーにおいては $(h\nu)^{-7/2}$ 、高エネルギーにおいては $(h\nu)^{-1}$ に比例する。

●コンプトン散乱

コンプトン散乱とは、入射ガンマ線光子が原子に束縛された電子と相互作用して反跳電子と散乱ガンマ線光子になる現象である。この場合散乱角に依存してこれら二つにエネルギーが分配される。光子の工

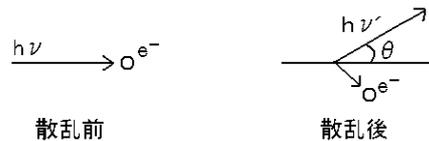


図 4: コンプトン散乱

ネルギーが電子の結合エネルギーに比較して十分大きくなって電子を自由電子と見なすことが出来るなると、非弾性散乱を受ける。図 4 の様に、散乱前は電子が静止していたと仮定して、散乱前の光子のエネルギーを $h\nu$ 、散乱光子のエネルギーを $h\nu'$ 、電子の静止質量エネルギーを m_0c^2 、散乱角を θ とすると、エネルギーの関係は

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_0c^2}(1 - \cos\theta)}$$

で表される。これより、コンプトン散乱によって得られる電子の運動エネルギー E は、

$$0 \leq E \leq \frac{2 \frac{h\nu}{m_0c^2}}{1 + 2 \frac{h\nu}{m_0c^2}} \cdot h\nu$$

となり、連続的なエネルギー分布を取ることが分かる。これより、入射光子のエネルギーが非常に大きくなると、電子が得られる運動エネルギーは $E = h\nu - \frac{m_0c^2}{2} \approx h\nu - 0.26$ [MeV] に近づくことが分かる。また、コンプトン散乱断面積はシンチレーションカウンターの Z に比例する。しかし光電効果は 1 回だけ起こるものではなく複数回起こり得るので、このため、全エネルギーをシンチレーションカウンター内で電子に与えることになると、光電効果とほぼ同じエネルギーを与えることになるので、これにより光電効果と同等のイベントにもなりうる。また、これより、シンチレーションカウンターが大型になれば、コンプトン散乱が複数回行われる確率が上がるため、光子の全エネルギーに相当する光電効果によるイベント数が見かけ上増えることになる。大型のシンチレーションカウンターでは光電効果よりもコンプトン散乱による全エネルギーに相当するイベントの割合が大きく、光電効果の断面積を用いて光電ピーク効率を計算することはできない。

●電子対生成

電子対生成とは、入射ガンマ線光子の完全な消滅位置に電子と陽電子の対を生成する現象で、NaI の原子核中で陽子近傍の強い電場によって起こるものである。電子陽電子対を生成するには $2m_0c$ のエネルギーが必要なので、この過程がエネルギー的に可能となるには 1.02 MeV 以上のガンマ線エネルギーが必要である。1.02 MeV を超えた分のガンマ線エネルギーは電子陽電子の運動エネルギーとなる。また、電子対生成断面積は Z^2 に比例し、 $(h\nu - 2m_0c^2)$ に比例する。しかし、 Z の大きい物質などの場合や高エネルギーの場合は Z^2 はよい近似とはならない。対生成でできた電子、陽電子のうち、陽電子が対消滅により消滅すると 2 個の 0.51 MeV の光子を生ずるが、この光子は吸収される場合及びそのまま外に出る場合があり、二つとも吸収された場合はシンチレーションカウンター内で光子が消費したエネルギーが全て発光に寄与することになるので、これは、光電効果に含まれることになる。また、一つも吸収されない、または一つのみ吸収の場合のピークが、それぞれ光電ピークより 1.02 MeV、0.51 MeV 低いピークを作ることになるので、3 つのピークが 0.51 MeV で並ぶことになる。この光子が吸収されずにコンプトン散乱を起こすことで連続的な分布を作ることになる。

2. (i) ケーブルの特性インピーダンスを Z_0 としてケーブルの終端に抵抗 Z を繋ぐと反射が起こり、その反射波の入射波に対する相対的波高 r は

$$r = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$$

で表される。ここで、 Z_0 は、単位長さ当たりの抵抗であり、 Z は同軸ケーブルの先に付ける抵抗値である。よって終端抵抗には $Z = Z_0$ となるものを選ばなければ $r \neq 0$ となるので反射波が存在し、Oscilloscope 上でその反射波も観測されることになり、正しい入射波を見ることが出来なくなる。よって、 $Z = Z_0$ とすることで、入射波のみを見ることが出来、繋ぎ方は図 5 の様になる。一般的に Z_0 は 50Ω であり、終端抵抗として $Z = 50 \Omega$ をとる。

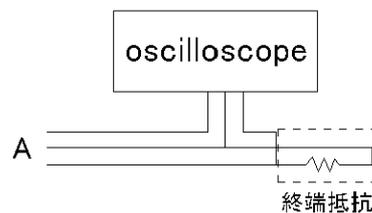


図 5: 終端抵抗の繋ぎ方

- (ii) NaI(Tl) 結晶とガンマ線との相互作用で出来た高エネルギーの電子は、結晶内を通過することで他の電子を価電子帯から伝導体へ上げて数多くの電子正孔対を作る。このとき正孔はすばやく活性化物質の位置へ移動してそれを電離し、一方電子は結晶中を自由に移動して電離された活性化物質に出会うまで動く。そこで電子は活性化物質の位置に落ち込んで独自の励起エネルギー状態を持った中性の不純物配位を形成する。この状態から基底状態へある半減期(蛍光減衰定数)をもって遷移することで可視領域の光子が放出されるので、光子の放出量は指数関数的になる。この時電子の移動時間等は非常に短いので無視してよく、光電子増倍管からの出力パルスは光子の放出量に比例するので点 A においては $V_A(t) = V_0 e^{-t/\tau}$ という形で表される。この場合 $\tau = 230 \text{ ns}$ だから、その概形は図 6 の様になる。次に点 A、コンデンサ、抵抗に流れる電流をそれぞれ I 、 I_1 、 I_2 とすると $I = I_1 + I_2$ が成り立つ。一方 $I = I_0 e^{-t/\tau}$ 、 $I_1 = C \frac{dV_B}{dt}$ 、 $I_2 = \frac{V_B}{R}$ だから、これらを代入して

$$I_0 e^{-t/\tau} = C \frac{dV_B}{dt} + \frac{V_B}{R}$$

この微分方程式を V_B について解く。まず左辺が 0 の場合の解は $V_B(t) = A e^{-t/\tau}$ 、但し $T = RC$ 、 A は時間

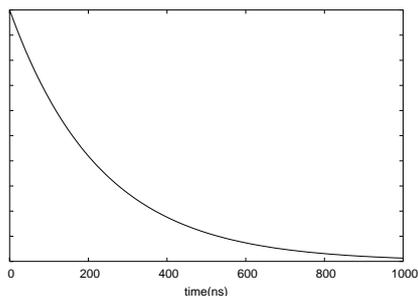


図 6: 点 A における出力

によらない定数である。次に $A = A(t)$ として上式に代入して計算すると、

$$\frac{dA}{dt} = \frac{RI_0}{T} e^{\left(\frac{t}{T} - \frac{t}{\tau}\right)}$$

$$\therefore A(t) = RI_0 \frac{\tau}{\tau - T} e^{\left(\frac{t}{T} - \frac{t}{\tau}\right)}$$

よって

$$V_B = RI_0 \frac{\tau}{\tau - T} e^{-\frac{t}{\tau}} + A e^{-\frac{t}{T}}$$

初期条件は $t = 0$ の時 $V_B = 0$ だから、 $A = -RI_0 \frac{\tau}{\tau - T}$ 、結局

$$V_B = RI_0 \frac{\tau}{\tau - T} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

となる。 $T = 10\mu\text{s}$ だから、その概形は図 7 の様になる。

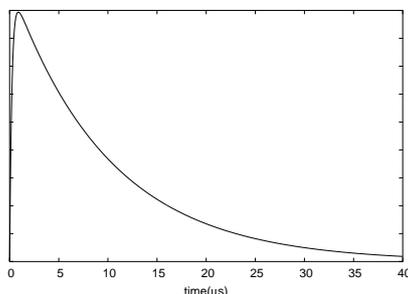


図 7: 点 B における出力

(iii) Discriminator のスレッシュホールドを用いて低いノイズをカットしたり、出力の先にハイパスフィルターやローパスフィルターを付けてノイズを落としたり、出力を増幅させて S/N 比を改善したりする。他にも、PMT のゲインが安定していないことも考えられる。これを解決するには、まず、同程度の Rate を長い時間 NaI(Tl) 検出器に入射させ続けることで慣らす。また、印加電圧が高いとゲインが印加電圧や PMT 中のダイノードの段数に大きく依存するために、例えば Microchannel Plate 等なるべく低い段数のものを用いたり、印加電圧をできるだけ低くて済むようにしたりする。印加電圧が高いとゲインが一定にならないだけでなく、ノイズも増やしてしまう可能性もあるため、あまりよくない。

3. (i) 一事象当たりの確率は同じ状況で測定し、計数時間が放射線の半減期に比べて短いことを仮定すれば一定であり、かつその確率は低い。また、試料中の原子核の総数が大きい。これより、反応が起こる確率 p が小さく、試行回数 n 大きい場合は、2 項分布で起きる確率 $P(x)$ は $\frac{n!}{(n-x)!} \approx n^x, (1-p)^{n-x} \approx e^{-pm}$ を用いて、

以下のようにポアソン分布の近似に近似できることになる。

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &\simeq \frac{(pn)^x e^{-pn}}{x!} \\ &= \frac{(\bar{x})^x e^{-\bar{x}}}{x!} \end{aligned}$$

ここで、 \bar{x} は分布の平均値であり、 $\bar{x} = pn$ である。これより、ポアソン分布の近似が十分に成立しているものと仮定できるので、よって、ガンマ線のカウント数を m としたとき、その標準偏差は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{x=0}^n (x - \bar{x})^2 \cdot P(x) = pn = \bar{x} \\ \sigma &= \sqrt{\bar{x}} \end{aligned}$$

よって、 $\sigma = \sqrt{m}$ で与えられる。線源をおかない場合の計数率は $m_1 = 600[10\text{min}] = 60[\text{min}]$ 、標準偏差は $\sigma_1 = \sqrt{m_1} \simeq 24[10\text{min}] = 2.4[\text{min}]$ となる。次に線源をおいた場合を考えると、全体の計数率は $m = 1000[2\text{min}] = 500[\text{min}]$ 、標準偏差は $\sigma = \sqrt{m} \simeq 32[2\text{min}] = 16[\text{min}]$ となる。よって線源から放射されるガンマ線の計数率は $m_2 = m - m_1 = 440[\text{min}]$ 、誤差伝播より $\sigma_2 = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_1^2} \simeq 16[\text{min}]$ となる。

(ii) 必要なカウント数を N 、要する時間を $m[\text{min}]$ とすると全体の計数率と標準偏差は

$$n_{tot} = \frac{N}{m} [\text{min}^{-1}], \quad \sigma_{tot} = \frac{N}{\sqrt{m}} [\text{min}^{-1}] \quad \dots (1)$$

よって線源については

$$n_s = \frac{N}{m} - n_1 = \frac{N}{m} - 60 [\text{min}^{-1}], \quad \sigma_s = \sqrt{\sigma_{tot}^2 + \sigma_1^2} = \sqrt{\frac{N}{m^2} + 6} [\text{min}^{-1}] \quad \dots (2)$$

(i) より $N \simeq 500m$ なので

$$n_s = 440 [\text{min}^{-1}], \quad \sigma_s = \sqrt{\frac{500}{m} + 6} [\text{min}^{-1}] \quad \dots (3)$$

精度を 1% とするには

$$\frac{\sigma_s}{n_s} = \frac{1}{10^2} \quad \therefore m \simeq 37.4 [\text{min}] \quad \dots (4)$$

なので、時間は 38 分必要である。

4. (a) 0.5 MeV のとき

0.5 MeV におけるガンマ線の NaI(Tl) シンチレーターにおける断面積は

$$\text{コンプトン散乱} > \text{光電効果} \gg 0 = \text{電子対生成}$$

であるので、これよりグラフは以下ようになる。

ここで、後方散乱ピークがない理想的な場合は、その部分が点線で示してある。電子対生成によるピークは電子静止質量の 2 倍のエネルギーよりも小さいので起こらず、全エネルギーピークはこの場合は問題の設定から大半は光電効果によるものである。

(b) 5 MeV のとき

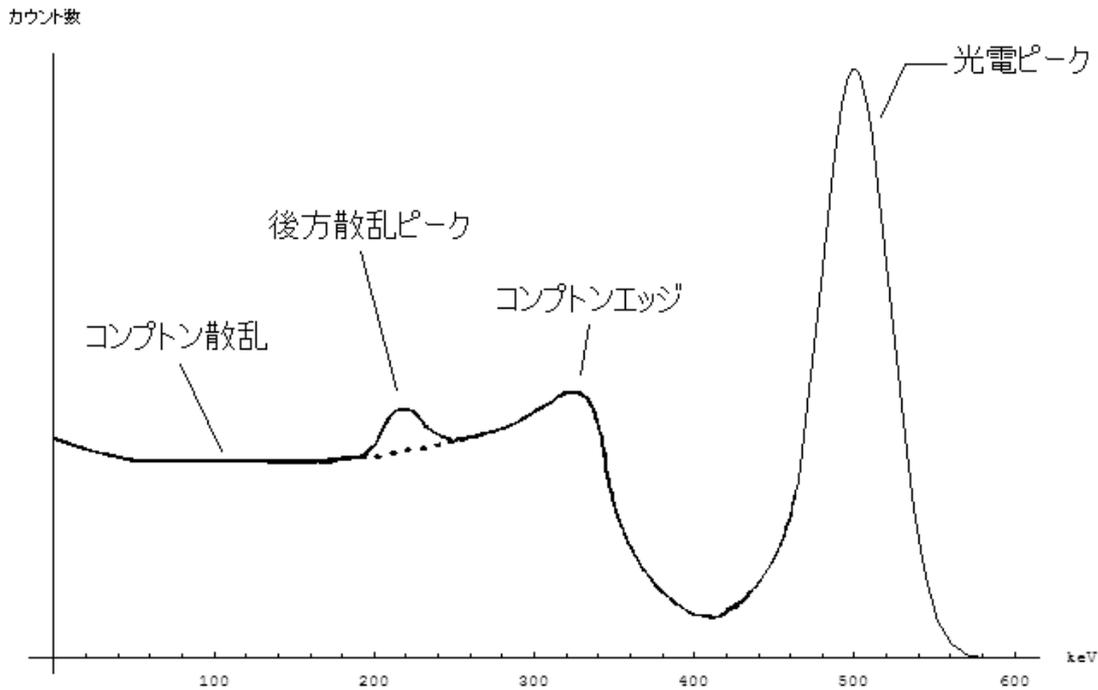


図 8: 0.5 MeV における度数分布

この場合は入射ガンマ線のエネルギーが大きいため断面積が、

$$\text{コンプトン散乱} > \text{電子対生成} \gg \text{光電効果} \approx 0$$

となり、また、NaI(Tl) 結晶の寸法は、入射ガンマ線との相互作用で生じる 2 次ガンマ線の平均自由行程よりも小さいが、2 次荷電粒子は NaI(Tl) 結晶内で完全に吸収される程度という問題の設定から、コンプトン散乱及び電子対生成による全エネルギーピークはほとんど得られず、光電効果はほとんど起こらないので、全エネルギーピークはほとんど無くなる。うちわけのほとんどは、コンプトン散乱したものが光電効果によって全エネルギーを落としたり、電子対生成したあとの、陽電子による電子との対消滅による 2 本の 511 keV のガンマ線が光電効果を起こすなどの、複数の効果の組み合わせによるため、一意に (a) のときのように光電効果によるピークとは決めることが出来ない。また、度数分布は以下のようになり、ここでも (a) と同様に後方散乱ピークがない理想的な場合は、点線で示してある。電子対生成によるピークが 2 本見えるのは、陽電子が電子と対消滅したときに出来るガンマ線が 0 本、1 本、2 本検出器内にエネルギーを落とすことがあるからであり、この問題設定では、NaI(Tl) 結晶の大きさがさほど大きくないことから、2 本とも全エネルギーを落とす確率は小さいので、全エネルギーより 511 keV 及び 1022 keV 小さい 2 つのピークが主に見えるためである。グラフの形状は、NaI(Tl) 結晶の大きさに依存し、大きくすればするほど相対的に全エネルギーピークが増え、その他のピークが減ることになる。問題の設定より NaI(Tl) 結晶の大きさは、6 割の確率で 2 次ガンマ線が相互作用すると仮定してグラフは作った。

5. (a)0.5 MeV のとき

0.5 MeV におけるガンマ線の NaI(Tl) シンチレーターにおける断面積は

$$\text{コンプトン散乱} > \text{光電効果} \gg 0 = \text{電子対生成}$$

であり、コンプトン散乱と光電効果の断面積のオーダーはほぼ同じであるので、このことから、実験装置としては、コリメーター等を用いてまずガンマ線源から出てきたガンマ線が全て検出器に入るようにする。便宜上

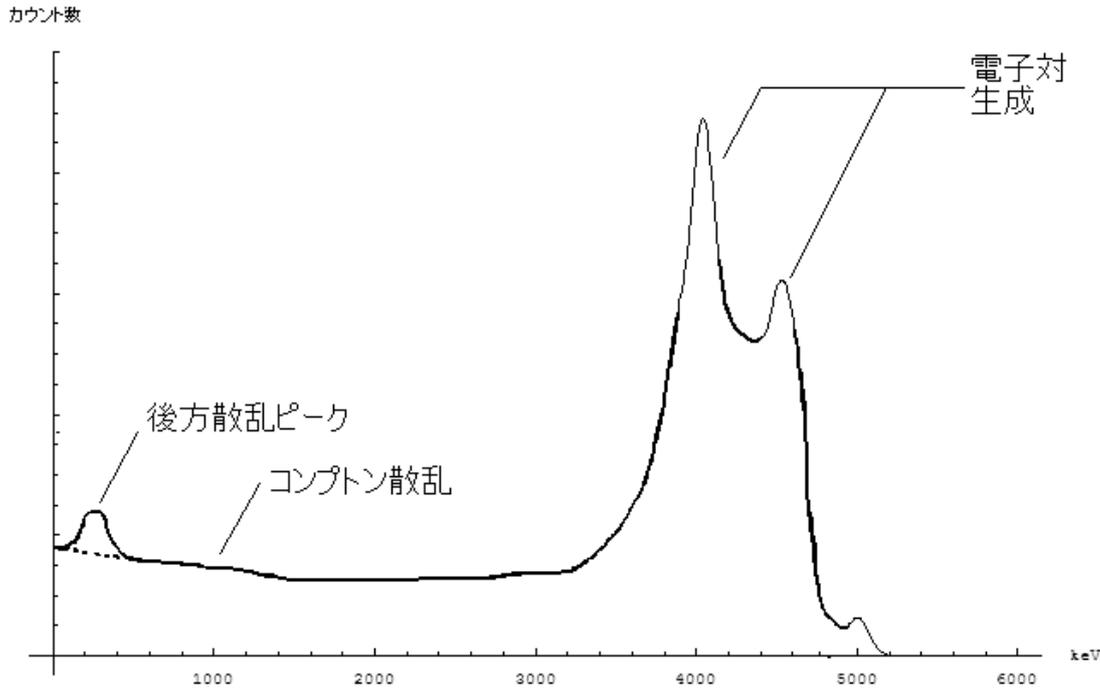


図 9: 5 MeV における度数分布

この検出器を検出器 A と呼ぶことにする。このまま測定すれば、結果は上記の断面積のとおり前問のグラフで書けとあったようになり、連続的なコンプトンピーク及びコンプトンエッジと全エネルギーピークである光電ピークとバックグラウンドが主に見えることになるので、まず、検出器とガンマ線源を大量の検出器で 4π 覆う。理想的には NaI(Tl) よりも BGO 等を使いった方がよいのだが問題の設定上 NaI(Tl) を用いることとする。そして、外側の覆っている全ての検出器を便宜上検出器 B と呼ぶことにする。ここで、A \overline{B} という逆計数測定を行う。すると、検出器 B を鳴らしたものはカウントされなくなるので、検出されるイベントがどのようなものがあるかを検討すると、

(i) 光電効果

入射ガンマ線は全エネルギーを検出器 A で失っており、全エネルギーピークを形成し、また検出器 B は鳴らさないので、カウントされる。

(ii) コンプトン散乱

1 回のコンプトン散乱によりガンマ線が失うエネルギーは運動量保存則及びエネルギー保存則からすぐ計算できるように全てではなく、全エネルギーを失わない。これにより、ガンマ線が検出器 A の外に逃げるものがある。もちろんコンプトン散乱は 1 回ではなく、複数起こる可能性もあり、また光電効果等も起こる可能性があるため、全エネルギーを失う可能性もある。これは検出器が大きくなると、光電ピークと呼ばれる全エネルギーピークが増えることに該当する。これより、検出器 A で全エネルギーを失わなかったイベントは検出器 B も鳴らすことになるので、このイベントは落ちる。当然全エネルギーを検出器 A で失えば検出器 B は鳴らないので、このイベントはカウントされることになる。

(iii) 電子対生成

この場合は入射エネルギーが電子の 2 倍の質量よりも小さいので起こらないが、仮に起こった場合でも、生成された電子と陽電子はすぐにとまり、ここで陽電子は電子と対消滅して、2 本の 511 keV のガンマ線を作るが、この 2 本のガンマ線もコンプトン散乱で議論したのと同様に、検出器 A で全エネルギーを失わなければ検出器 B をならずことに鳴るので、カウントされなくなり、結局全エネルギーを落とした場合のみのイベントが残ることになる。

(iv) バックグラウンド

バックグラウンドは、覆われている中のところで発生して、それが検出器 A において全エネルギーを落と

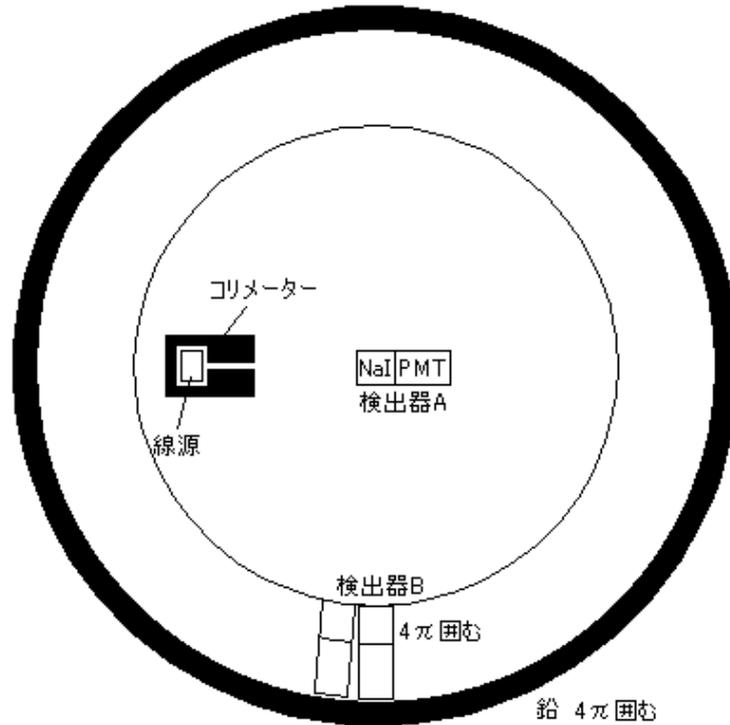


図 10: (a) の実験装置の配置

すという、ほとんど考えられないケースを除くと、必ず検出器 B も鳴ることになるので、これより、バックグラウンドによるイベントも落ちることになる。

以上から、全エネルギーピークのみが残ることになる。これは、NaI(Tl) 結晶の寸法は、入射ガンマ線との相互作用で生じる 2 次ガンマ線の平均自由行程よりも小さいが、2 次荷電粒子は NaI(Tl) 結晶内で完全に吸収される程度という問題の設定から、おそらくほぼ全ての全エネルギーピークは光電ピークからなると考えられる。これより、バックグラウンドを排除して、さらに全エネルギーのピークのみを取り出すことが可能となる。また、さらに検出器全体を鉛で覆うと、よりバックグラウンドを除くことが出来る。これにより、環境放射線のガンマ線や、アルファ線は鉛の厚さを数 cm 程度にしておくことで鉛中で止まり、検出器内に入らないで済み、二次宇宙線がバックグラウンドとして残ることになる。二次宇宙線は高エネルギーの μ 粒子が主で、残りが電子であり、その運動エネルギーのオーダーは GeV であるので、これを鉛で止めるためには、最小電離損失が $-\frac{dE}{dx} \approx 2$ [MeV cm²/g] であるので、NaI の密度が 3.67 g/cm³ であることから $-\frac{dE}{dx} \approx 7$ [MeV/cm] であり、メートルのオーダーの厚さ以上の鉛で覆う必要があり、あまり現実的でなく、カミオカンデのように山の中でやるなどしないといけなくなる。また、回路のノイズやバックグラウンドを減らすために Discriminator を取り付け、線源から放射されるガンマ線のエネルギーがおおよそ分かっていることから、エネルギーに対してスレッシュホールドを設け、エネルギーの上限と下限を設置したほうがよいと考えられる。これにより内側の検出器 A に対して μ 粒子が 1 MeV 以下のエネルギーを落とす確率は最小電離損失の値より、極めて小さいので、バックグラウンドがさらに除ける。線源から出たガンマ線が荷電粒子であるアルファ線やベータ線程では無いが空気との相互作用が起こることを考慮すると、できれば、これらの装置は空気による影響を無くすために真空槽に入れたほうがよい。

(b) 5 MeV のとき

この場合は入射ガンマ線のエネルギーが大きいため断面積が、

$$\text{コンプトン散乱} > \text{電子対生成} \gg \text{光電効果} \approx 0$$

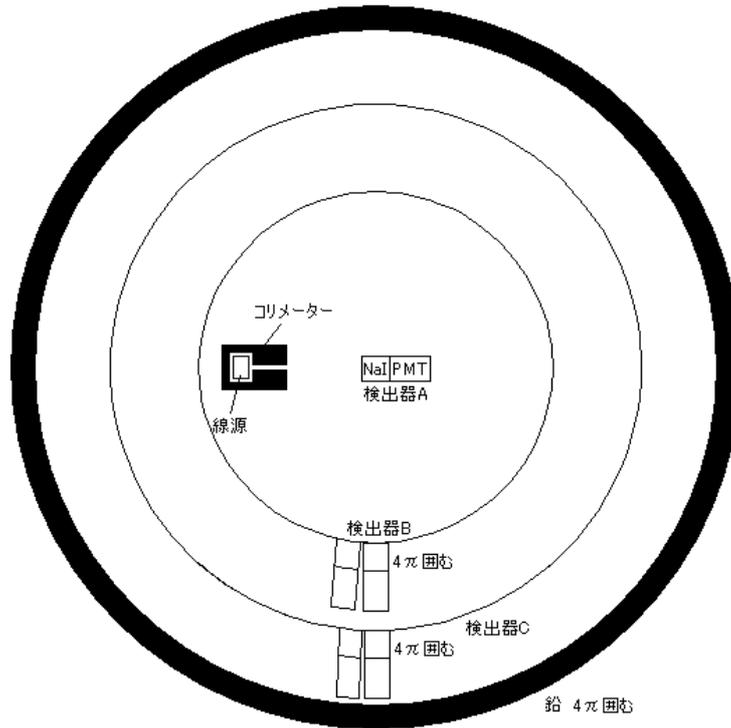


図 11: (b) の実験装置の配置

となるので、問題の設定から、コンプトン散乱及び電子対生成による検出器 A における全エネルギーピークはほとんど得られないので、(a) で考えた方法は使えないことがわかる。これより、同じ検出器を使っていることから、同じ印加電圧を光電子増倍管にかけてやれば、増幅率も同じであり、同じエネルギーのガンマ線を入射させてやれば、得られる電流は同じである（当然 2 項分布の確率過程でありゆらぎは当然存在する）ということが仮定できる。つまり、(a) と同じように装置を組み立てるが、今度は検出器 A 及び検出器 B からの出力電流の全電流をまとめたものを考える。そうすると、検出器 A 及び検出器 B で全エネルギーを失う場合、これらを合計したものが全エネルギーとなり、全エネルギーを測定することができる。このままだと検出器 A 及び検出器 B において全エネルギーを失うイベントのみを拾うことが出来ずまたバックグラウンドが存在するので、検出器 A 及び線源と検出器 B の外側にさらに検出器で覆って、それを (a) での検出器 B のような逆計数にすることで、検出器 A 及び検出器 B で全エネルギーを失わずにさらに外にエネルギーが漏れた場合のイベントを落とし、またバックグラウンドを含むイベントを除くことができる。この検出器のことを検出器 C と呼ぶことにする。本当はこの逆計数用にはプラスチックシンチレーターとかの方がよいと考えられる。そしてさらにその外側を、環境放射線が止まる程度の数 cm 程度の鉛などの遮蔽で (a) と同様に覆う。また、主なバックグラウンドである μ 粒子の Stopping Power が (a) で書いた通り $-\frac{dE}{dx} \approx 7$ [MeV/cm] で表されるので、NaI(Tl) 結晶の大きさは正確には書かれてはいないが、NaI シンチレーター中で 5 MeV 前後という低いエネルギーを落とす確率は少なく、Discriminator によって検出器 A 及び検出器 B のエネルギーのスレッシュホールドを、上限 6 MeV 程度にしておくことでバックグラウンドによるイベントをより減らすことができると考えられる。さらに、同時計測における Timing を光速で走るところから計算して少し余裕を持たせて合わせるようにし、一イベント当たり検出器 A 及び検出器 B のうちエネルギーがその中で落とされた検出器の数があまりにも多いイベントや、一イベント当たりの電流を流した検出器に対し下限のスレッシュホールドも Discriminator で設けることでエネルギーの小さいものを除くことにより、全エネルギーを落とさきれていないイベントやバックグラウンドの影響を除くことができると考えられる。最終的には全体として和が 5 MeV 前後のところにくるピークを上下のスレッシュホールドをかけて残してやれば求めたい全エネルギーピークを見ることが出来る。(a) と同様に、(b) の装置もできたら真空槽に入れたほうがよい。

問題 6 解答

1. キルヒホッフの法則を閉回路に適用した $\frac{1}{C_0} \int I dt + L \frac{dI}{dt} = 0$ において $I \propto e^{i\omega_0 t}$ (ω_0 : 共振角周波数) を代入すると、

$$\frac{I}{iC_0\omega_0} + i\omega_0 LI = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$$

したがって、求める共振振動数は

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}} \quad \dots (1)$$

である。

2. コンデンサーの容量 C_0 は、平板の面積を S 、間隙の長さを d とすると、

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad \dots (2)$$

であるから、式 (1)(2) より、

$$d = \epsilon_0 LS (2\pi f_0)^2$$

ここへ $f_0 = 10[\text{MHz}]$, $L = 10[\mu\text{H}]$, $S = 1.0 \times 10^{-4}[\text{m}^2]$ を代入すると、

$$d = 3.5 \times 10^{-5}[\text{m}] = 35[\mu\text{m}]$$

3. 温度が下がると、コンデンサーの平板が熱収縮して式 (2) の S が減少する。これによって C_0 が小さくなり、共振振動数 f_0 は上昇する。

(注) なお、平板間を支えている支柱が収縮することで d も減少することが考えられるが、式 (2) の分子の S は面積の次元を持つのに対して、分母の d は距離の次元であるから、分子がより強く効いて C_0 は減少するだろう。

4. コンデンサーの間隙を液体ヘリウムで満たしたときの容量は、比誘電率 ϵ を用いて、

$$C = \epsilon\epsilon_0 \frac{S}{d} = \epsilon C_0 \quad \dots (3)$$

と書ける。また問題で与えられた式

$$\frac{\alpha}{k}\rho = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$$

を ϵ について解くと、

$$\epsilon = \frac{1 + 2\alpha\rho/k}{1 - \alpha\rho/k} \quad \dots (4)$$

である。この 2 式 (3)(4) を用いると、共振振動数は次のように書ける。

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{f_0}{\sqrt{\epsilon}} = \sqrt{\frac{1 - \alpha\rho/k}{1 + 2\alpha\rho/k}} f_0 \quad \dots (5)$$

いま、

$$\frac{\alpha}{k}\rho = 1.43 \times 10^{-3} \ll 1$$

であるから、 $\alpha\rho/k$ の 2 次以上の項を無視すれば、次のように近似できる。

$$\begin{aligned} f &\simeq \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha\rho}{k}\right) \left(1 - \frac{\alpha\rho}{k}\right) f_0 \\ &\simeq \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\alpha\rho}{k}\right) f_0 \quad \dots (6) \\ &= 9.979[\text{MHz}] \end{aligned}$$

5. 測定精度 $\Delta f = 1[\text{Hz}]$ のとき、共振振動数 f と $f + \Delta f$ とを識別できるとする。これに対応して、液体ヘリウムの密度を ρ 、 $\rho - \Delta\rho$ とすると、 $\alpha\rho/k$ が 1 に対して十分に小さい範囲では、式 (6) が使えるから、

$$\begin{aligned} \frac{f}{f_0} &\simeq 1 - \frac{3}{2} \frac{\alpha\rho}{k} \\ \frac{f + \Delta f}{f_0} &\simeq 1 - \frac{3}{2} \frac{\alpha(\rho - \Delta\rho)}{k} \end{aligned}$$

辺々を引くことで、

$$\Delta\rho = \frac{2}{3} \frac{k}{\alpha} \frac{\Delta f}{f_0} = 6 \times 10^{-3} [\text{kg/m}^3] = 6 [\text{g/m}^3]$$

が密度の測定精度となる。

6. T_0 より高い温度では、通常の液体に多く見られるように温度が高くなるにしたがって密度が低くなる性質があるのに対し、 $T = T_0$ 以下では温度の上昇にともなって密度が上昇している。また、 $T = T_0$ では密度にカスプが見られる。

密度 ρ はギブスの自由エネルギー G と $\rho \propto \frac{N}{V} \propto \frac{1}{\partial G / \partial \rho}$ の関係にあり、 $T = T_0$ に密度のカスプがあることから、ギブス自由エネルギーは 1 階微分にカスプがあり、 T_0 に 2 次相転移点を持つことが予想される。実際、液体ヘリウム ${}^4\text{He}$ は $T_0 = 2.2[\text{K}]$ が λ 点と呼ばれる 2 次の相転移点であることが知られており、これを境にして高温側は He と呼ばれる常流動相、低温側は He と呼ばれる超流動相であるので、これが密度の温度依存性の由来であると考えられる。

7. 図 2 での液体ヘリウムの測定温度は 2.2[K] 前後であるから、この範囲で温度に対する抵抗の変化が大きい炭素抵抗温度計の方が測定に適していると考えられる。
8. (白金抵抗温度計) 白金の格子結晶を構成する原子は、その平衡位置付近で格子振動を行う。この格子振動が格子配列の周期性を乱し、結晶内を移動する電子と電子 - 格子相互作用を起こすことで電気抵抗の原因となっている。高温では格子振動の影響が強く効くため、電気抵抗が大きくなる。

(炭素抵抗温度計) 炭素抵抗温度計は半導体としての性質を持つと考えられる。価電子帯から伝導体へバンドギャップを超えて電子が励起されると、伝導体の伝導電子と価電子帯のホールの両方が電気伝導を担うキャリアとなる。温度が高くなると、この励起される電子の数が増加してキャリアが増えるために電気抵抗は減少する。

問題 7 解答

1.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} &= e \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_x(0) \\ p_y(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ p_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \dots (1)$$

$$\begin{pmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eEt \\ p_0 \end{pmatrix} \quad \dots (2)$$

Einstein's equation $\frac{\epsilon^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$ より、

$$\epsilon^2 = (c^2 p^2 + m^2 c^4)^{\frac{1}{2}} \quad \dots (3)$$

$$= [c^2(p_0^2 + e^2 E^2 t^2) + m^2 c^4]^{\frac{1}{2}} \quad \dots (4)$$

2. $\mathbf{p} = m\gamma c\boldsymbol{\beta}$ 、 $\epsilon = m\gamma c^2$ より、 $\mathbf{p} = \epsilon \cdot \frac{\boldsymbol{\beta}}{c}$ の関係式が常に成り立っているので、 $\mathbf{v} = \frac{c\boldsymbol{\beta}}{\epsilon}$ の関係に式 (4) を代入して、

$$\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \frac{c^2}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2 + c^2 e^2 E^2 t^2}} \begin{pmatrix} eEt \\ p_0 \end{pmatrix} \quad \dots (5)$$

$v_x(t)$ 成分を時間積分すると、

$$\int_0^t dt' \frac{ec^2 Et'}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2 + c^2 e^2 E^2 t'^2}}$$

ここで、 $\alpha \equiv \frac{m^2 c^2 + c^2 p_0^2}{c^2 e^2 E^2}$ とおくと、

$$\begin{aligned} &= \int_0^t dt'^2 \frac{c}{2\sqrt{t'^2 + \alpha}} \\ &= [c(t'^2 + \alpha)^{\frac{1}{2}}]_0^t \\ &= c \{c(t^2 + \alpha)^{\frac{1}{2}} - \alpha^{\frac{1}{2}}\} \end{aligned}$$

ここで α を元の形に戻すと、

$$= \frac{1}{eE} \left\{ \sqrt{c^2 e^2 E^2 t^2 + (m^2 c^4 + c^2 P_0^2)} - \sqrt{m^2 c^4 + c^2 P_0^2} \right\}$$

次に、 $v_y(t)$ 成分を時間積分すると、

$$\int_0^t dt' \frac{c^2 P_0}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 P_0^2 + c^2 e^2 E^2 t'^2}}$$

ここで、 $\beta = \frac{c^2 e^2 E^2}{m^2 c^4 + c^2 P_0^2}$ とおくと、

$$\begin{aligned} &= \frac{c^2 P_0 / \beta}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 P_0^2}} \int_0^t d(\beta t') \frac{1}{\sqrt{1 + (\beta t')^2}} \\ &= \frac{c^2 P_0 / \beta}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 P_0^2}} \sinh^{-1} \beta t \\ &= \frac{c P_0}{e E} \sinh^{-1} \left(\frac{c e E t}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 P_0^2}} \right) \end{aligned}$$

以上から、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{eE} \left(\sqrt{(m^2 c^4 + c^2 P_0^2) + (c e E t)^2} - \sqrt{m^2 c^4 + c^2 P_0^2} \right) \\ \frac{c P_0}{e E} \sinh^{-1} \left(\frac{c e E t}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 P_0^2}} \right) \end{pmatrix} \quad \dots (6)$$

3. $y = L$ のとき、 $\tan \theta = \frac{v_x}{v_y} \rightarrow \theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_x}{v_y} \right)$ であるから、
まず、 t と L の関係は (6) から、

$$L = \frac{c P_0}{e E} \sinh^{-1} \left(\frac{c e E t}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 P_0^2}} \right)$$

であり、(5) から $\frac{v_x}{v_y}$ も求まり、上式とあわせて

$$\frac{v_x}{v_y} = \frac{c E t}{P_0} = \frac{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 P_0^2}}{c P_0} \sinh \left(\frac{e E L}{c P_0} \right)$$

ゆえに、

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 P_0^2} c P_0}{\sinh \left(\frac{e E L}{c P_0} \right)} \right] \quad \dots (7)$$

...

...

4. 揺れ角が十分小さいときには $\theta \sim \frac{v_x}{v_y}$ と近似してよい。

$$\theta = \left(1 + \frac{m^2 c^2}{P_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sinh \left(\frac{e E L}{c P_0} \right)$$

$P_0 = 1.0 [\text{Gev}]$ 、 $m_k = 494 [\text{Mev}/c^2]$ 、 $m_\pi = 140 [\text{Mev}/c^2]$ を用いて、

$$\frac{\theta_\pi}{\theta_k} \sim \frac{\left(1 + \frac{m_\pi^2 c^2}{P_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{m_k^2 c^2}{P_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(1 + 0.140^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + 0.494^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \dots (9)$$

$$\approx 0.91 \quad \dots (10)$$

...

5. π^0 の静止系 (実験室系を基準として π^0 静止系に、 \prime をつける) で崩壊をみると崩壊 $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ のエネルギー保存則と運動量保存則は、

$$\begin{cases} \text{エネルギー保存則 } m_{\pi^0}c^2 = cP_1' + cP_2' \\ \text{運動量保存則 } 0 = \mathbf{P}_1' + \mathbf{P}_2' \end{cases} \quad \dots (12)$$

γ 線が x 軸に対して対称に運動しているのだから、 x' 軸に対しても対称に運動するはずである。また、運動量保存則から γ 線は π^0 静止系では反対向きに飛び散る。よって、 $\mathbf{P}_1' = P_y' \mathbf{y}'$ 、 $\mathbf{P}_2' = -P_y' \mathbf{y}'$ であるから、

$$m_{\pi^0} = 2P_{y'} \quad ie.P_{y'} = \frac{m_{\pi^0}c}{2}$$

4元運動量 $(\frac{\epsilon}{c}, P_x, P_y, P_z)$ は反変ベクトルなので $\mathbf{P}_{\gamma_1}^{\mu'} = (\frac{m_{\pi^0}c}{2}, 0, \frac{m_{\pi^0}c}{2}, 0)$ 、 $\mathbf{P}_{\gamma_2}^{\mu'} = (\frac{m_{\pi^0}c}{2}, 0, -\frac{m_{\pi^0}c}{2}, 0)$ である。これを実験室系に戻すと、

$$\mathbf{P}^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} \mathbf{P}^{\nu} \quad ie.P^{\nu} = (\Lambda_{\nu}^{\mu'})^{-1} \mathbf{P}^{\mu'}$$

matrix 表示では、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\epsilon}{c} \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\epsilon'}{c} \\ P_x' \\ P_y' \\ P_z' \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\epsilon'}{c} \\ P_x' \\ P_y' \\ P_z' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{m_{\pi^0}\gamma c}{2} \\ \frac{m_{\pi^0}\gamma\beta c}{2} \\ \frac{m_{\pi^0}c}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

γ_2 について同様に計算すれば、 y 成分が反転した結果を得る。

$$\mathbf{P}_{\gamma_1} = \begin{bmatrix} \frac{m_{\pi^0}\gamma c}{2} \\ \frac{m_{\pi^0}\gamma\beta c}{2} \\ \frac{m_{\pi^0}c}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{\gamma_2} = \begin{bmatrix} \frac{m_{\pi^0}\gamma c}{2} \\ \frac{m_{\pi^0}\gamma\beta c}{2} \\ -\frac{m_{\pi^0}c}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots (13)$$

γ 線が x 軸となす角度は $\tan \theta = \frac{|v_y|}{|v_x|} = \frac{1}{\gamma\beta}$ より、 $\theta = \tan^{-1}(\frac{1}{\gamma\beta})$ である。

6. π^0 静止系での $\tau' = 8.4 \times 10^{-17} \text{ sec}$ は実験室系では $\tau = \gamma\tau'$ である。 v 一定として、 $\gamma\tau'$ 時間にすすむ距離は $v\gamma\tau' = 25\mu\text{m}$ であるから、 $\gamma = \frac{\beta\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}}$ を代入して、

$$\frac{c\beta\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}} = 25 \times 10^{-6} \text{ sec}$$

簡単のために以下の置き換えを行えば、

$$A \equiv \frac{25 \times 10^{-6} \text{ sec}}{c\tau'} = 995 \text{ sec/m} \quad \beta^2 = \frac{A^2}{1+A^2}$$

よって、中性 γ 線のエネルギーは

$$\epsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{mc^2}{1-\frac{A^2}{1+A^2}} \approx \sqrt{1+A^2}mc^2 \approx Amc^2 \quad \dots (14)$$

$$\approx 1.3 \times 10^9 eV \quad \dots (15)$$

7. 空気中での γ 線の減衰長を X_{air} とおき、簡単のため $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ の崩壊機構を問題 5 で指定された方向の γ 線絞って考える。薄膜を距離 d だけ離すことによって γ 線が大気中を余計に走ることになる距離は $d\sqrt{1+\frac{1}{\beta^2\gamma^2}}$ であるから、 γ 線の輸送方程式、

$$\frac{N_\gamma}{x} = -\frac{N_\gamma}{X_{air}} \quad \dots (16)$$

をといて、 $N_{薄膜2} = N_0(1 - e^{-\frac{d\sqrt{1+\frac{1}{\beta^2\gamma^2}}}{X_{air}}})$ であるので、その後の $\gamma \rightarrow e^+e^-$ の対生成過程で電子が飛んで検出器の方向に出てゆくものの粒子分布は同一とみなせるので陽電子の検出器における計測率は $1 - e^{-\frac{d\sqrt{1+\frac{1}{\beta^2\gamma^2}}}{X_{air}}}$ 倍になる。

8. 薄膜 2 中で起こる反応は 2 つある。1 つは γ 線からの対生成、また 2 つめは対生成された陽電子が金属中の電子と対消滅を起す反応である。簡単のために薄膜中を走る距離を薄膜自身の厚さ (L) と同じとする。次に薄膜 2 中の、対生成による γ 線の減衰長を X_γ 、対消滅による陽電子線の減衰長を X_{e^+} とおけば、薄膜 2 中 l の距離で γ 線が崩壊したものの粒子数は前問の $N_{薄膜2}$ を用いて、

$$N_{薄膜2} \text{ を出て行く陽電子数} = \Sigma_l N_{薄膜2} e^{-\frac{l}{X_\gamma}} \left(1 - e^{-\frac{l-l}{X_{e^+}}}\right) \quad \dots (17)$$

$$= \int_0^L L dl N_{薄膜2} e^{-\frac{l}{X_\gamma}} \left(1 - e^{-\frac{l-l}{X_{e^+}}}\right) \quad \dots (18)$$

$$= N_{薄膜2} \left[X_\gamma \left(1 - e^{-\frac{L}{X_\gamma}}\right) - \frac{X_{e^+} X_\gamma}{X_{e^+} - X_\gamma} \left(e^{-\frac{L}{X_{e^+}}} - e^{-\frac{L}{X_\gamma}}\right) \right] \quad \dots (19)$$

よって、これが最大となるような L にすればよい。よって陽電子の消滅が γ 線の崩壊より dominant な薄膜ではなるべく薄く、陽電子の消滅より γ 線の崩壊が十分な薄膜ではなるべく厚くすればよい。

問題 8 解答

1. $\alpha, \beta, \gamma \ll 1$ より、 $\alpha \simeq \tan \alpha = h/p$ 、以下 β, γ も同様に考えて

$$\alpha = \frac{h}{p} \quad \beta = \frac{h}{q} \quad \gamma = \frac{h}{r} \quad \dots (1)$$

2. 異なる媒質の境界における入射角、屈折角、媒質の屈折率の関係式は、 $\theta_1, \theta_2, n_1, n_2$ を用いて

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad \dots (2)$$

と書ける。 $\theta_1, \theta_2 \ll 1$ より、 $\sin \theta_1 \simeq \theta_1, \sin \theta_2 \simeq \theta_2$ から、

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \dots (3)$$

3. $\triangle ABC$ に注目すると、 $\theta_1 = \alpha + \gamma$ 、 $\triangle IBC$ に注目すると、 $\theta_2 = \gamma - \beta$

設問 2 の結果 $n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$ から $n_1(\alpha + \beta) = n_2(\gamma - \beta)$

これに設問 1 の値を代入し、両辺に出てくる h を消去して、

$$n_1 \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r} \right) = n_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) \quad \dots (4)$$

4. 設問 3 で得られた式を変形して、

$$r = \frac{(n_2 - n_1)pq}{n_1q + n_2p} \quad \dots (5)$$

像の拡大率 m は

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{q - r}{p + r} = \frac{q - \frac{(n_2 - n_1)pq}{n_1q + n_2p}}{p + \frac{(n_2 - n_1)pq}{n_1q + n_2p}} = \frac{(n_1q + n_2p)q - (n_2 - n_1)pq}{(n_1q + n_2p)p + (n_2 - n_1)pq} = \frac{n_1q}{n_2p} \quad \dots (6)$$

ゆえに、

$$m = \frac{n_1q}{n_2p} \quad \dots (7)$$

5. 設問 3 で得られた式を変形して、

$$q = \frac{\frac{n_2}{n_1}}{\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\frac{1}{r} - \frac{1}{p}} \quad \dots (8)$$

問題に与えられているように、 $n_2/n_1 = 1.34, 1/r = 1/0.80 = 1.25$ (1/cm) なので、

$$q = \frac{1.34}{0.34 \times 1.25 - \frac{1}{p}} \quad \dots (9)$$

$p = 25$ (cm) のとき、 $1/p = 0.04$ (1/cm)

$$q_{\text{opt}} = \frac{1.34}{0.34 \times 1.25 - 0.04} = 3.48 \dots \simeq 3.5 \quad \dots (10)$$

$p = \infty$ のとき、 $1/p = 0$

$$q_{\text{inf}} = \frac{1.34}{0.34 \times 1.25} = 3.15 \dots \simeq 3.2 \quad \dots (11)$$

したがって、 $p = 25$ (cm) のとき $q_{\text{opt}} = 3.5$ (cm)、 $p = \infty$ のとき $q_{\text{inf}} = 3.2$ (cm)

6. 設問 5 で求めた q の値は、いずれも角膜と網膜との間の実際の距離 2.5cm よりも大きいため、網膜上に像を結ぶようにするためには、像を近くに結ぶためのレンズとしての働きを持つ器官が必要であり、これが水晶体である。設問 5 の結果からわかるように、物体との距離は見る対象によって変化し、それに応じて空気と角膜の間の屈折だけを考えた時に像を結ぶ位置は変化するので、像の位置を網膜上に持っていくためにレンズとしての水晶体は焦点距離を変化させる必要がある。これは水晶体を周りで支えるチン小体と毛様筋の弛緩・収縮と水晶体自身の弾性により、水晶体の厚みを変化させることで対応している。物体との距離に近いほど、より近くに像を結ぶために、水晶体は厚くなり、レンズとしての焦点距離は短くなる。
7. 孵化後間もなく目を手術して上下さかさまに移植し直し、視覚情報を学習できないようにしばらく暗室で生育させた視神経再生後のカエルを用いる。簡単などころでは、まずこのカエルを明るい場所に移してエサを与え、エサが取れるかどうか観察してみればよい。エサがまともを取れなかったら、正しい配線パターンは学習により獲得されるものと結論づけられる。これだけだと、エサが取れた場合には他の感覚に依存している可能性がある。人間の脳における学習のように、カエルの視神経の配線パターンが後天的に獲得されるなら、暗い場所で生育されていて視覚情報の学習できなかった時期に確立された配線パターンから、明るい場所で生育されている過程において正しく配線がつかないことが予想される。したがって、ある図形を見せたときに脳内において電気信号が伝わって来て刺激を受信する位置を何らかの方法¹でマーキングし、暗室から出した直後と、しばらく明るい場所で生育させた後で、脳内で信号が観測される部位の位置パターンに変化があるか調べればよい。変化があれば、配線パターンは学習によって獲得されるものであり、変化がなければ、遺伝的にプログラムされたものである。
8. 各視神経と一次視覚野の特定の位置を対応づける分子があったとしても、一対一対応であると考えすることは不可能である。考えられる機構として、
1. 細胞間接着力に勾配がある。
 2. 少数の物質が、場所によって濃度勾配を形成しており、これが視神経の結合部位に影響を与えている。
- 前者の場合、場所により接着力が異なるとなると、マッピングがうまく維持できない可能性がある²ので、後者のように考えるのが自然である³。

記述部分の解答には確固たる自信はありません。もし間違っていたらごめんさい...m(_ _)m 適当に自分で訂正を入れて下さい。

¹視野地図は実際に 2DG(2-デオキシグルコース)法を用いて可視化することができる。細胞は、放射性ラベルした 2DG をグルコースと区別することなく取り込むが、代謝することはできず、オートラジオグラフィにより、貯留した 2DG を可視化することができる。高い活動を示し、エネルギー源として多くのグルコースを必要とする細胞が高くラベルされる。

²例えばブラモデルを作るときに、はじめから接着剤をべたべた塗ってしまうとうまく作れないであろう。あらかじめパーツをはめてくつくべきところを確認してから接着しないといけない。これは生体内の細胞接着でも同じことである。

³この考え方は実際に昔からあったらしいが、実験的に解明され始めたのは 1995 年とごく最近のことである。この実験結果は、『網膜の神経細胞は、鼻から耳方向に行くにつれて EphA3 というレセプター分子の密度が高くなり、中脳視蓋(一次視覚野は大脳にある部位だが、その中継部位)ではこのレセプターに結合する ephrin-A2 というリガンド分子の密度が前から後ろに行くに従って高くなっており、レセプター密度の低い視神経はリガンド密度の高い視蓋細胞表面と結合していた』というものである。レセプターにリガンドが結合することで細胞にシグナルを伝達するのだが、フリーのレセプターとリガンドが十分量存在して、レセプター、リガンドの結合、解離が平衡反応だとすると、単純な化学反応論に従うとしてよい。すると、レセプター密度 R 、リガンド密度 L として、シグナルの強さは $R \cdot L$ と考えてよい。網膜の各場所から出た視細胞は、共通のシグナル強度の標準値 S を持つとすると、視神経の軸索先端の成長円錐は今受けているシグナル強度 $R \cdot L$ と、標準値 S との差が小さくなるようにサーボしながら動く、という仮定を考えることができる。これをサーボ機構モデルといい、視神経のマッピングにおける最近の有力なモデルである。勿論生体内ではさらに正確なマッピングのための様々な機構が働いていることが予測される。ただし、院試ではここまでの知識は要求されないと思うが...

問題 9 解答

1. 一般解が ψ_l, ψ_r の波動関数の重ね合わせとして、

$$\psi = a\psi_l + b\psi_r$$

として得られるとおく。(1),(2) 式を上式に代入して (4) を比較することにより次の式が得られる。

$$\begin{cases} A_{-1} \exp[ikz] + B_{-1} \exp[-ikz] = a \exp[ikz] + aR \exp[-ikz] + bT \exp[-ikz] \\ A_0 \exp[ikz] + B_0 \exp[-ikz] = aT \exp[ikz] + b \exp[-ikz] + bR \exp[ikz] \end{cases} \quad \dots (1)$$

従って、

$$A_{-1} = a, \quad B_{-1} = aR + bT \quad \dots (2)$$

$$A_0 = aT + bR, \quad B_0 = b \quad \dots (3)$$

a, b を消去することにより関係式

$$\begin{cases} A_0 = TA_{-1} + (B_{-1} - RA_{-1}) \frac{R}{T} \\ B_0 = (B_{-1} - RA_{-1}) \frac{1}{T} \end{cases} \quad \dots (4)$$

が立つ。転送行列 M を構成すると、

$$M = \begin{pmatrix} T - \frac{R^2}{T} & \frac{R}{T} \\ -\frac{R}{T} & \frac{1}{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\alpha}}{\sin(\gamma)} & i \cot(\gamma) \\ -i \cot(\gamma) & \frac{e^{-i\alpha}}{\sin(\gamma)} \end{pmatrix} \quad \dots (5)$$

2. 周期系の波動関数であることより

$$\Phi(z+a) = A_{n+1} e^{ika} e^{ikz} + B_{n+1} e^{-ika} e^{-ikz} \quad \dots (6)$$

である。また、Bloch 条件より

$$\Phi(z+a) = e^{iqa} \Phi(z) = A_n e^{iqa} e^{ikz} + B_n e^{iqa} e^{-ikz} \quad \dots (7)$$

(14),(15) より求める関係式は、

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n e^{i(q-k)a} \\ B_{n+1} = B_n e^{i(q+k)a} \end{cases} \quad \dots (8)$$

となる。

3. 1,2 の結果と問題文中の (6) を用いると、

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \quad \dots (9)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \operatorname{cosec}(\gamma) & i \cot(\gamma) \\ -i \cot(\gamma) & e^{-i\alpha} \operatorname{cosec}(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \quad \dots (10)$$

となる。これを解くと、

$$\begin{pmatrix} A_n e^{i(q-k)a} \\ B_n e^{i(q+k)a} \end{pmatrix} \sin(\gamma) = \begin{pmatrix} A_n e^{i\alpha} + iB_n \cos(\gamma) \\ -iA_n \cos(\gamma) + B_n e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \quad \dots (11)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_n (e^{i(q-k)a} \sin(\gamma) - e^{i\alpha}) = iB_n \cos(\gamma) \\ B_n (e^{i(q+k)a} \sin(\gamma) - e^{-i\alpha}) = -iA_n \cos(\gamma) \end{cases} \quad \dots (12)$$

2式を用いて、 A_n, B_n を消去すると、

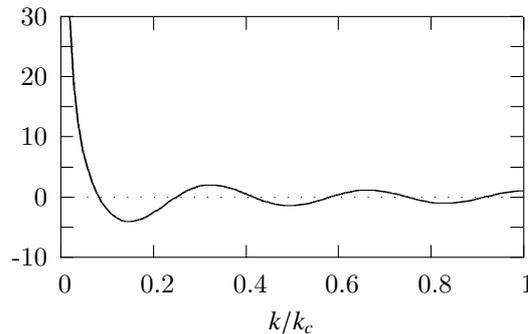
$$\cos(qa) = \frac{\cos(ka + \alpha)}{\sin(\gamma)} \quad \dots (13)$$

となる。

4.

$$ka + \alpha = \frac{k}{k_c}(k_c a - c) > \frac{\pi k}{2 k_c} = \gamma \quad \dots (14)$$

であることから、グラフは $0 < k < k_c$ の範囲では以下ようになる。(図は $k_c a - c = 6\pi$ の場合を示した。)



5. $ka + \alpha = n\pi$ (n は整数) のとき、 $|\cos(ka + \alpha)| = 1$ であり、また $\gamma = \frac{\pi k}{2 k_c}$ ($0 < k < k_c$) のとき $\sin(\gamma) < 1$ であるので、

$$\left| \frac{\cos(ka + \alpha)}{\sin(\gamma)} \right| > 1 \quad \dots (15)$$

となる。従って題意のような q は存在しない。

この条件は上図のグラフが ± 1 の直線ではさまれた領域の中にあることを意味している。従って、 $\cos(qa) = \frac{\cos(ka + \alpha)}{\sin(\gamma)}$ を満たす実数 q は存在せず Bloch 条件を満たせないので、そのような周期系の波動関数は存在しないことが分かる。したがって、 $ka + \alpha = n\pi$ で計算されるエネルギーの準位が禁止される。

6. $|\cos(qa)| \leq 1$ 、つまり $\left| \frac{\cos(\frac{k}{k_c}(k_c a - c))}{\sin(\frac{\pi k}{2 k_c})} \right| = \left| \frac{\cos(\frac{k}{k_c}(k_c a - c))}{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi k}{2 k_c})} \right| \leq 1$ であればよい。このとき、

$$-\frac{\pi k}{2 k_c} + \frac{\pi}{2}(2n + 1) \leq \frac{k}{k_c}(k_c a - c) \leq \frac{\pi k}{2 k_c} + \frac{\pi}{2}(2n + 1) \quad (n \text{ は整数}) \quad \dots (16)$$

であるので、 k について解くと、

$$\frac{n + \frac{1}{2}}{\frac{k_c a - c}{\pi} + \frac{1}{2}} \leq \frac{k}{k_c} \leq \frac{n + \frac{1}{2}}{\frac{k_c a - c}{\pi} - \frac{1}{2}} \quad \dots (17)$$

という条件を得る。ただし、 $0 < k < k_c$ であるので、 $n = 0, 1, 2, \dots$ であり、さらに場合分けすると、

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{n + \frac{1}{2}}{\frac{k_c a - c}{\pi} + \frac{1}{2}} \leq \frac{k}{k_c} \leq \frac{n + \frac{1}{2}}{\frac{k_c a - c}{\pi} - \frac{1}{2}} \quad \left(n \leq \frac{k_c a - c}{\pi} - 1 \right) \\ \frac{n + \frac{1}{2}}{\frac{k_c a - c}{\pi} + \frac{1}{2}} \leq \frac{k}{k_c} \leq 1 \quad \left(\frac{k_c a - c}{\pi} - 1 < n \leq \frac{k_c a - c}{\pi} \right) \end{array} \right. \quad \dots (18)$$

(ただし、 $n = 0, 1, 2, \dots$)

を得る。以上の範囲以外の n が存在しないことは (25) 式から分かる。

7. 6. での結果に $k_c a - c = \frac{5\pi}{2}$ を代入すると、

$$\frac{k_c}{3}\left(n + \frac{1}{2}\right) \leq k \leq \frac{k_c}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad \dots (19)$$

となる。さらに $0 < k < k_c$ を満たすような n を選ぶと許されるのは結局、

$$\frac{1}{6}k_c \leq k \leq \frac{1}{4}k_c, \quad \frac{1}{2}k_c \leq k \leq \frac{3}{4}k_c, \quad \frac{5}{6}k_c \leq k < k_c \quad \dots (20)$$

のみ。さらに、 $E_0 \equiv \frac{\hbar k_c^2}{2m}$ とすれば、エネルギー E について、

$$\frac{1}{36}E_0 \leq E \leq \frac{1}{16}E_0, \quad \frac{1}{4}E_0 \leq E \leq \frac{9}{16}E_0, \quad \frac{25}{36}E_0 \leq E < E_0 \quad \dots (21)$$

となる。従って分散関係の概略は以下ようになる。

