

2004 年度 入学試験 一般教育科目

第 1 問

次の英文は H. A. Bethe の講演からの抜粋である。これを読み以下の設問 (i)、(ii)、(iii)、(iv) に答えよ。

From time immemorial people must have been curious to know what (a) the sun shining. The first scientific attempt at an explanation was by Helmholtz about one hundred years ago, and was based on the force most familiar to physicists at the time, gravitation. When a gram of matter falls to the sun's surface it (b) a potential energy

$$E_{pot} = -GM/R = -1.91 \times 10^{15} \text{ erg/g}, \quad \dots (1)$$

where $M = 1.99 \times 10^{33} \text{ g}$ is the sun's mass, $R = 6.96 \times 10^{10} \text{ cm}$ its radius, and $G = 6.67 \times 10^{-8}$ the gravitational constant. A similar energy was set free when the sun was assembled from interstellar gas or dust in the dim past; actually somewhat more, because most of the sun's material is located closer to its center, and therefore has a numerically larger potential energy. One-half of the energy set free is (c) into kinetic energy according to the well-known virial theorem of mechanics. This will permit us later to estimate the temperature in the sun. The other half of the potential energy is radiated away. We have known that at present the sun radiates

$$\epsilon = 1.96 \text{ erg/g sec.} \quad \dots (2)$$

Therefore, if gravitation supplies the energy, there is enough energy available to supply the radiation for about 10^{15} sec which is about 30 million years.

This was long enough for nineteenth century physicists, and certainly a great deal longer than man's recorded history. It was not long enough for the biologists of the time. Darwin's theory of evolution had just become popular, and biologists argued with Helmholtz that evolution would require a longer time than 30 million years, and that therefore his energy source for the sun was insufficient. They were right.

(1) At the end of the 19th century, radioactivity was discovered by Becquerel and the two Curie's who received one of the first Nobel prizes for this discovery. Radioactivity permitted a determination of the age of the earth, and more recently, of meteorites which indicate the time at which matter in the solar system solidified. On the bases of such measurements the age of the sun is estimated to be 5 milliards of years, within about 10 %. So gravitation is not sufficient to supply its energy over the ages.

Eddington, in the 1920's, investigated very thoroughly the interior constitution of the sun and other stars, and was much concerned about the sources of stellar energy. His favorite hypothesis was the complete annihilation of matter, changing nuclei and electrons into radiation. The energy which was to be set free by such a process, if it could (d), is given by (2) the Einstein relation between mass and energy and is

$$c^2 = 9 \times 10^{30} \text{ erg/g} \quad \dots (3)$$

This would be enough to (e) the sun's radiation for 1500 milliards of years. However nobody has ever observed the complete annihilation of matter. From experiments on earth we know that protons and electrons do not annihilated each other in 10^{30} years. It is hard to believe that the situation would be different as a temperature of some 10 million degrees such as (f) in the stars, and Eddington appreciated this difficulty quite well.

(3) From the early 1930's it was generally assumed that the stellar energy is produced by nuclear reactions. Already in 1929, Atkinson and Houtermans concluded that at the high temperatures in the interior of a star, the nuclei in the star could penetrate into other nuclei and cause nuclear reactions, releasing energy. In 1933, particle accelerators began to open

rate in which such nuclear reactions were actually observed. They were found to obey very closely the theory of Gamow, Condon and Gurney, on the penetration of charged particles through potential barriers. In early 1938, Gamow and Teller revised the theory of Atkinson and Houtermans on the rate of « thermonuclear » reactions, i.e. nuclear reactions occurring at high temperature. At the same time, von Weizsäcker speculated on the reactions which actually might take place in the stars.

meteorite: 隕石.

1 erg = 10^{-7} J (cgs 単位).

milliard: 10 億.

(i) 文章中の (a) から (f) まで 6 箇所の四角にあてはまる単語の原型を次の中からえらべ。

(ア) transform (イ) supply (ウ) keep (エ) get (オ) prevail (カ) occur

(a)		(b)		(c)		(d)		(e)		(f)	
-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--	-----	--

(ii) 下線部 (1) を和訳せよ。

(iii) 下線部 (2) の the Einstein relation とはなんであるか、簡単に英語で説明せよ。

(iv) 下線部 (3) を和訳せよ。

第 2 問

次の英文は R. A. Millikan の講演からの抜粋である。これを読み以下の設問 (i),(ii),(iii) に答えよ。

The most direct and unambiguous proof of the existence of the electron will probably be generally admitted to be found in an experiment which for convenience I will call the oil-drop experiment. But before discussing the significance of that advance I must ask you to bear with me while I give the experimentalist's answer to the very fundamental but very familiar query: « What is electricity? » His answer is naive, but simple and definite. He admits at once that as to the ultimate nature of electricity he knows nothing.

He begins rather with a few simple and familiar experiments and then sets up some definitions which are only descriptions of the experiments and therefore involve no hypothetical elements at all.

He first notes the fact that a pith ball, after contact with a glass rod that has been rubbed with silk, is found to be endowed with the new and striking property that it tends to move away from the rod with a surprisingly strong and easily measurable force. He describes that fact, and affirms at the same time his ignorance of all save the existence of this force, by inventing a new word and saying that the pith ball has been put into a positively electrified state, or simply has received a charge of positive electricity. He then measures the amount of its charge by the strength of the observed force.

Similarly he finds that the pith ball, after contact with an ebonite rod that has been rubbed with cat's fur is attracted, and he proceeds to describe this experiment by saying that it has now received a charge of negative electricity. Whenever the pith ball is found to have been put, by contact with any body or by any other process, into a condition to behave in either of the foregoing ways, it has, by definitions, received a charge of either positive or negative electricity. The whole of our thinking about electrical matters starts with these two simple experiments and those two definitions.

In order now to get the most crucial possible test of the correctness or incorrectness of Franklin's conception of a particle, or an atom, of electricity it was clearly necessary to reduce the charge on the pith ball to the smallest possible amount, to change that charge by the most minute possible steps, and then to see whether the forces acting upon it at a given distance from the glass rod (i.e. in a constant field) had any tendency to increase or decrease by unitary steps.

The success of the experiments first performed in 1909, was wholly due to the design of the apparatus, i.e. to the relation of the parts.

The pith ball itself which was to take on the smallest possible charge had of course to be the smallest spherical body which could be found and yet which would remain of constant mass; for a continuously changing gravitational force would be indistinguishable, in its effect upon the motion of the charged body, from a continuously changing electrical charge.

A non-homogeneous or non-spherical body also could not be tolerated; for the force acting on the pith ball had to be measured by the speed of motion imparted to it by the field, and this force could not be computed from the speed unless the shape was spherical and the density absolutely constant. This is why the body chosen to replace the pith ball was an individual oil-droplet about a thousandth of a millimeter in diameter blown out of an ordinary atomizer and kept in an atmosphere from which convection currents had been completely removed by suitable thermostatic arrangements. The glass rod, the purpose of which was to produce a constant electrical field, was of course replaced by the two metal plates C and D (Dif. 1) of an air condenser, one of the plates (D) being attached to the positive, the other (C) to the negative terminal of a battery, and a switch being added, as shown in the figure, so as to make it possible to throw the field on or off at will.

pith: 木髄、植物の茎の中心にある柔らかい組織、軽く、帯電しやすい性質を持つ。

rod: 棒. save: を除いて (=except).

spherical: 球形の. atomizer: 噴霧器.

convection currents: 対流

(i) Millikan は木髄球が受け取った電荷が正であるか、あるいは負であるかを調べるためには、どのような実験を行えば良いと言っているのだろうか。それぞれの場合の木髄球の振る舞いも答えよ。

(ii) 油滴の落下実験を成功に導いた油滴の特徴について、本文中に述べられていることを箇条書きにしてすべて挙げよ。

(iii) ここには示していないが、原文では実験装置の概略図 (Fig. 1) が描かれている。その一部である 2 枚の金属板 (C と D) を含む回路図を、本文中の説明をもとに描け。

第 1 問

(1) n 個の n 次元列ベクトル $u_j (j = 1, \dots, n)$ を用いて、行列 U を $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ で定義するとき、 U がユニタリ行列ならば、 $\{u_j\}$ は正規直交系をなすことを示せ。

(2) A を実対称行列、 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ を n 次元ベクトルとする。ただし、 T は転置を表す。このとき実 2 次形式 $\phi(x) = x^T A x$ に対し適当な直交変換 $x = P y$ を行うと、対角行列 B を用いて $\phi = y^T B y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$ の標準形に変換できる。

$\phi(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_3x_1$ について、 $A, P, \lambda_i (i = 1, 2, 3)$ を求め標準形で表せ。

(3) A を n 次実対称行列として、次の微分方程式を考える。

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

このとき、スカラー関数 $\Phi(x)$ を用いて $\frac{d\Phi}{dt} = -\Delta_x \Phi(x)$ と書けることを $\Phi(x)$ の具体形とともに示せ。ただし、 $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right)^T$, $\Delta_x \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\right)^T$ である。

(4) 設問 (3) で軌道 $x(t)$ に沿った Φ の微分 $d\Phi(x(t))/dt$ は、 $\frac{d\Phi(x(t))}{dt} \leq 0$ を満たすことを示せ。また、任意の $x (x \neq 0)$ に対し $\Phi > 0$ が成り立つならば、解軌道は最終的に $x = 0$ に漸近することを示せ。

第 2 問

$f(x, t)$ についての偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(xf) + D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \dots (1)$$

を考える.

f および $\partial f / \partial x$ は、 $x \rightarrow \pm\infty$ に対して十分速やかに 0 に収束する. また、 D は正の定数とする.

(1) x についての f の定積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx$$

が保存されること、すなわち $dI/dt = 0$ であることを示せ.

(2) 原点 $x = 0$ を中心とするガウス分布関数

$$g(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \quad (\sigma \text{ は正の定数})$$

が、はじめの偏微分方程式の定常解 (すなわち、 $\partial f / \partial t = 0$) であるとき、 σ はどう表せるか.

(3) 中心 $X(t)$ 、標準偏差 $\sigma(t)$ (X および σ は t の関数) のガウス分布関数

$$f(x, t) = g(x - X(t), \sigma(t))$$

が、はじめの偏微分方程式の解になるために、 $X(t)$ および $\sigma(t)$ の満たすべき常微分方程式を求めよ.

(4) はじめの偏微分方程式を、初期条件 $f(x, 0) = \delta(x - 1)$ のもとで解き、 $t \rightarrow \infty$ において設問 (2) で求めた定常解に近づくことを示せ。(デルタ関数 $\delta(x - 1)$ は、 $g(x - 1, \sigma)$ の $\sigma \rightarrow 0$ の極限であることを考慮せよ.)

第 1 問 解答

(i)

(a)	ウ	(b)	エ	(c)	ア	(d)	カ	(e)	イ	(f)	オ
-----	---	-----	---	-----	---	-----	---	-----	---	-----	---

(ii)

19 世紀末、ベクレルと二人のキューリーによって放射能が発見され、彼らはこの発見により初期のノーベル賞を受賞した。放射能は地球の年齢の決定を可能にし、さらに最近では、太陽系で物質が凝固した年代を暗示する隕石の年齢の決定も可能にした。このような測定に基づくと太陽の年齢は、10 % 以内の誤差で、50 億年であると見積もられる。よって重力は、このような長い年月の間太陽のエネルギーを供給するには不十分である。

(iii)

The Einstein relation between mass and energy contends that mass and energy are equivalent. Their relation is given by the equation " $\epsilon^2 = mc^2$ ", where ϵ represents the energy, m the mass, and c the speed of the light.

(iv)

1930 年代初頭より、星のエネルギーは核反応によって生み出されているのだと一般的に考えられるようになった。1929 年にすでに、アトキンソンとホーターマンが、星の中心の高い温度においては星の中の原子核は他の原子核まで到達することができ、エネルギーの解放をともなう核反応を起こすことができると結論したのだ。1933 年には、このような核反応が実際に観測されるような粒子加速器が稼動しはじめた。

第2問 解答

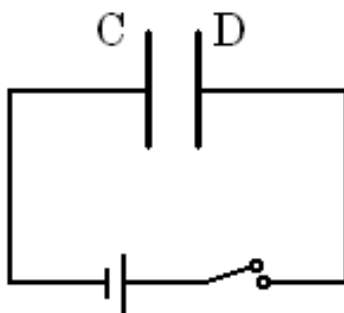
(i)

木髓球に絹でこすったガラス棒を近づけて、木髓球の動きを見れば良いと言っている。もし木髓球が正に帯電しているならガラス棒から離れようとし、逆に負に帯電しているならガラス棒に引き寄せられる。

(ii)

- 最小の電荷を受け取れるように、油滴が、実現できる最小の大きさであったこと。
- 電場から受ける力を計算できるように、油滴が球型であったこと。
- 油滴の質量が同じになるように、質量密度が完全に一定であったこと。

(iii)



第 1 問 解答

(1)

$$U = (\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2 \quad \cdots \quad \vec{u}_n) \text{ と書くと、} U^* = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^* \\ \vec{u}_2^* \\ \vdots \\ \vec{u}_n^* \end{pmatrix} \text{ である。}$$

U がユニタリー行列であるから、

$$U^*U = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^* \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_1^* \cdot \vec{u}_2 & \cdots \\ \vec{u}_2^* \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_2^* \cdot \vec{u}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = E$$

各成分を見れば、題意は証明された。

(2)

$$\phi = \vec{x}^T A \vec{x} = \vec{y}^T P^T A P \vec{y}$$

適当な直交行列 P を用いて、A を対角化する。固有ベクトルが互いに直交することを利用する。まず A の固有値、固有ベクトルを求め、それを使って基底の変換をする。

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ から固有値を求めると、}$$

$$\text{固有値 } \lambda = 1 \text{ に対して、固有ベクトル } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{固有値 } \lambda = 2 \text{ に対して、固有ベクトル } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{固有値 } \lambda = 5 \text{ に対して、固有ベクトル } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。P を求めるには、P が直交変換であることに注意して、P の各列をノルム 1 の固有ベクトルにする。よって

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(3)

$n=3$ くらいで実験するのが、わかりやすいかと思われる。

A の成分を a_{ij} のように書くことにする。

成分で書くと、

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

積分して、

$$x_1 = a_{11} \frac{x_1^2}{2} + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + f(x_2, x_3)$$

$$x_2 = a_{21}x_1x_2 + a_{22} \frac{x_2^2}{2} + a_{23}x_1x_3 + f(x_1, x_3)$$

$$x_3 = a_{31}x_1x_3 + a_{32}x_2x_3 + a_{33} \frac{x_3^2}{2} + f(x_1, x_2)$$

ただし f は任意の関数でよい。A は対角行列であることに注意すると、次のようにすればよいことがわかる。

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= -\left(\sum_{i=1}^n a_{ii} \frac{x_i^2}{2} + \sum_{i \neq j} a_{ij} \frac{x_i x_j}{2}\right) \\ &= -\sum_{i,j} a_{ij} \frac{x_i x_j}{2} \end{aligned}$$

(4)

$$\frac{dx}{dt} = A\vec{x} = -\nabla_x \Psi(\vec{x})$$

から直接示そうとすると、成分計算がごちゃごちゃになって、ちょっと難しい。

ここは (2) を使って、基底の変換をする。

$$\vec{x} \rightarrow P\vec{y}$$

とすると、

$$P^{-1}\nabla_x \rightarrow \nabla_y$$

であり、プサイがスカラーなので変換を受けないことに注意すると、

$$\frac{dy}{dt} = P^{-1}APy = -\nabla_y \Psi(\vec{y})$$

となり、プサイを対角化した、

$$\Psi = -\sum_i \lambda_i \frac{y_i^2}{2} \quad \dots (1)$$

だけで考えればいいことになる。こうしておけば、直接計算して、

$$\frac{d\Psi(y(t))}{dt} = -\sum_i \lambda_i y_i \frac{dy_i}{dt} = +\sum_i \lambda_i y_i \frac{\partial \Psi(y)}{\partial y_i} = -\sum_i \lambda_i^2 y_i^2 \leq 0 \quad \dots (2)$$

で問題の前半は終わった。

また、任意の $x(x \neq 0)$ に対して $\Psi > 0$ が成り立つとき、(1) 式から \dot{y} は負。すると (1) 式の言っていることは、 y が中心 $y=0$ から離れるほど、二次関数的に単調にポテンシャルが増加することである。式 (2) の意味は、「解曲線に沿ったポテンシャルの時間変化は、マイナス」つまり、「ポテンシャルの低いほうへ y は移動」であるから、解軌道は最もポテンシャルの低い $y=0$ へ漸近する。

第 2 問 解答

偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(xf) + D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \dots (1)$$

を考える.

ただし、条件として

- $f, \partial f/\partial x$ が, $x \rightarrow \pm\infty$ に対して十分速やかに 0 に収束する.
- D は正の定数

が与えられている.

(1)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx \quad \dots (2)$$

として, $dI/dt = 0$ を示す.

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x}(xf) + D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dx \\ &= \left[xf + D\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{-\infty}^{\infty} \quad \dots (3) \end{aligned}$$

条件より,

$$xf \rightarrow 0(x \rightarrow \pm\infty) \quad \dots (4)$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow 0(x \rightarrow \pm\infty) \quad \dots (5)$$

であるから, $\dots (5)$ に代入して, $dI/dt = 0$ が云える. \square

(2)

$$g(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \quad \dots (6)$$

に対して,

$$\frac{\partial}{\partial x}(xg) + D\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0 \quad \dots (7)$$

であるための σ の条件を求める.

計算すると,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{x}{\sigma^2} g \quad \dots (8)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{g}{\sigma^2} + \frac{x^2}{\sigma^4} g \quad \dots (9)$$

であることから、… (9) にこれらを代入すると、

$$g - \frac{x^2}{\sigma^2}g + D \left[\frac{x^2}{\sigma^4}g - \frac{g}{\sigma^2} \right] = 0$$

$$\iff \left(1 - \frac{D}{\sigma^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2} \right) g = 0 \quad \dots (10)$$

これが x に関わらず成立するので、 $1 - D/\sigma^2 = 0$ が云える.

$$\therefore \sigma = \sqrt{D} \quad \square \quad \dots (11)$$

(3)

ガウス分布関数

$$f(x, t) = g(x - X(t), \sigma(t)) \quad \dots (12)$$

が… (12) の解になるための条件を考える.

… (12) の f の微分は

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left[\frac{1}{\sigma(t)^3} \left\{ (X(t) - x)^2 \frac{d\sigma}{dt} - \sigma(t)(X(t) - x) \frac{dX}{dt} \right\} - \frac{1}{\sigma(t)} \frac{d\sigma}{dt} \right] g(x - X(t), \sigma(t)) \quad \dots (13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x - X(t)}{\sigma(t)^2} g(x - X(t), \sigma(t)) \quad \dots (14)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left[\frac{(x - X(t))^2}{\sigma(t)^4} - \frac{1}{\sigma(t)^2} \right] g(x - X(t), \sigma(t)) \quad \dots (15)$$

となるので、これを… (15) に代入して、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sigma(t)^3} \frac{d\sigma}{dt} \right) x^2 + \left(\frac{1}{\sigma(t)^2} \frac{dX}{dt} - \frac{2X(t)}{\sigma(t)^3} \frac{d\sigma}{dt} \right) x + \left\{ \left(\frac{X(t)^2}{\sigma(t)^3} - \frac{1}{\sigma(t)} \right) \frac{d\sigma}{dt} - \frac{x(t)}{\sigma(t)^2} \frac{dX}{dt} \right\} \\ & = \left(\frac{D}{\sigma(t)^4} - \frac{1}{\sigma(t)^2} \right) x^2 + \left(\frac{X(t)}{\sigma(t)^2} - \frac{2DX(t)}{\sigma(t)^4} \right) x + \left\{ 1 + D \left(\frac{X(t)^2}{\sigma(t)^4} - \frac{1}{\sigma(t)^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad \dots (16)$$

を得るが、これが x によらずに成り立つための条件は各係数が等しいことであるので、結果として、

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{D}{\sigma} - \sigma \quad \dots (17)$$

$$\frac{dX}{dt} = -X \quad \dots (18)$$

を得る. \square

(4)

常微分方程式… (17),… (18) を初期条件 $\sigma(t) = 0, X(t) = 1$ の下で解けばよい.

常微分方程式… (17) の一般解は、

$$\sigma(t) = \sqrt{D \pm \exp\{-2(t - C)\}} \quad (C \text{ は任意定数}) \quad \dots (19)$$

であるから、初期条件より、

$$\sigma(t) = \sqrt{D(1 - \exp(-2t))} \quad \dots (20)$$

が解である.

同様にして、

$$X(t) = \exp(-t) \quad \dots (21)$$

がわかる.

したがって、 $x \rightarrow \infty$ で、 $\sigma \rightarrow \sqrt{D}, X \rightarrow 0$ であるから、確かに解は、 $g(x, \sqrt{D})$, すなわち (2) でもとめた定常解に近づくことになる. \square