2004年度　入学試験 一般教育科目（英語なし）

■ 第１問

(1) n 個の n 次元列ベクトル $u_j(j=1,\ldots,n)$ を用いて、行列 U を $U=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ で定義するとき、U がユニタリー行列ならば、$\{u_j\}$ は正規直交系をなすことをを示せ。

(2) A を実対称行列、$\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)^T$ を n 次元ベクトルとする。ただし、T は転置を表す。このとき実２次形式 $\phi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}$ に対し適当な直交変換 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ を行うと、対角行列 B を用いて $\phi=\boldsymbol{y}^TB\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^n\lambda_iy_i^2$ の標準形に変換できる。
$\phi(\boldsymbol{x})=4x_1^x+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+2x_2x_3-2x_3x_1$ について、$A,P,\lambda_i(i=1,2,3)$ を求め標準形で表せ。

(3) A を n 次実対称行列として、次の微分方程式を考える。

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x}$$

このとき、スカラー関数 $\Phi(\boldsymbol{x})$ を用いて $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=-\Delta_x\Phi(\boldsymbol{x})$ と書けることを $\Phi(\boldsymbol{x})$ の具体形とともに示せ。ただし、$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=(\frac{dx_1}{dt},\ldots,\frac{dx_n}{dt})^T,\Delta_x\Phi=(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial\Phi}{\partial x_n})^T$ である。

(4) 設問 (3) で軌道 $\boldsymbol{x}(t)$ に沿った Φ の微分 $d\Phi(\boldsymbol{x}(t))/dt$ は、$\frac{d\Phi(\boldsymbol{x}(t))}{dt}\leq 0$ を満たすことを示せ。また、任意の $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\neq 0$ に対し $\Phi>0$ が成り立つならば、解軌道は最終的に $\boldsymbol{x}=0$ に漸近することを示せ。

■ 第 2 問

$f(x,t)$ についての偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(xf) + D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \cdots (1)$$

を考える.

f および $\partial f/\partial x$ は、$x \to \pm\infty$ に対して十分速やかに 0 に収束する. また、D は正の定数とする。

(1) x についての f の定積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dx$$

が保存されること、すなわち $dI/dt = 0$ であることを示せ。

(2) 原点 $x = 0$ を中心とするガウス分布関数

$$g(x,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \quad (\sigma \text{は正の定数})$$

が、はじめの偏微分方程式の定常解（すなわち、$\partial f/\partial f = 0$）であるとき、$\sigma$ はどう表せるか。

(3) 中心 $X(t)$、標準偏差 $\sigma(t)$（X および σ は t の関数）のガウス分布関数

$$f(x,t) = g\left(x - X(t), \sigma(t)\right)$$

が、はじめの偏微分方程式の解になるために、$X(t)$ および $\sigma(t)$ の満たすべき常微分方程式を求めよ。

(4) はじめの偏微分方程式を、初期条件 $f(x,0) = \delta(x-1)$ のもとで解き、$t \to \infty$ において設問 (2) で求めた定常解に近づくことを示せ。（デルタ関数 $\delta(x-1)$ は、$g(x-1,\sigma)$ の $\sigma \to 0$ の極限であることを考慮せよ。）

■ 第１問 解答

(1)

$$U = \begin{pmatrix} \vec{u_1} & \vec{u_2} & \cdots & \vec{u_n} \end{pmatrix} \text{と書くと、} U^* = \begin{pmatrix} \vec{u_1}^* \\ \vec{u_2}^* \\ \vdots \\ \vec{u_n}^* \end{pmatrix} \text{である。}$$

U がユニタリー行列であるから、

$$U^*U = \begin{pmatrix} \vec{u_1}^* \cdot \vec{u_1} & \vec{u_1}^* \cdot \vec{u_2} & \cdots \\ \vec{u_2}^* \cdot \vec{u_1} & \vec{u_2}^* \cdot \vec{u_2} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix} = E$$

各成分を見れば、題意は証明された。

(2)

$$\phi = \vec{x}^T A \vec{x} = \vec{y}^T P^T A P \vec{y}$$

適当な直交行列 P を用いて、A を対角化する。固有ベクトルが互いに直交することを利用する。まず A の固有値、固有ベクトルを求め、それを使って基底の変換をする。

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{から固有値を求めると、}$$

$$\text{固有値}\lambda = 1 \text{ に対して、固有ベクトル} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{固有値}\lambda = 2 \text{ に対して、固有ベクトル} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{固有値}\lambda = 5 \text{ に対して、固有ベクトル} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。P を求めるには、P が直交変換であることに注意して、P の各列をノルム 1 の固有ベクトルにする。よって

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(3)

n=3 くらいで実験するのが、わかりやすいかと思われる。
A の成分を a_{ij} のように書くことにする。
成分で書くと、

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$
$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$
$$x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

積分して、

$$x_1 = a_{11}\frac{x_1^2}{2} + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + f(x_2, x_3)$$
$$x_2 = a_{21}x_1x_2 + a_{22}\frac{x_2^2}{2} + a_{23}x_1x_3 + f(x_1, x_3)$$
$$x_3 = a_{31}x_1x_3 + a_{32}x_2x_3 + a_{33}\frac{x_3^2}{2} + f(x_1, x_2)$$

ただし f は任意の関数でよい。A は対角行列であることに注意すると、次のようにすればよいことがわかる。

$$\Psi(x) = -(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\frac{x_i^2}{2} + \sum_{i\neq j}^{n} a_{ij}\frac{x_ix_j}{2})$$
$$= -\sum_{i,j}^{n} a_{ij}\frac{x_ix_j}{2}$$

(4)

$$\frac{dx}{dt} = A\vec{x} = -\nabla_x\Psi(\vec{x})$$

から直接示そうとすると、成分計算がごちゃごちゃになって、ちょっと難しい。
ここは (2) を使って、基底の変換をする。

$$\vec{x} \to P\vec{y}$$

とすると、

$$P^{-1}\nabla_x \to \nabla_y$$

であり、プサイがスカラーなので変換を受けないことに注意すると、

$$\frac{dy}{dt} = P^{-1}APy = -\nabla_y\Psi(\vec{y})$$

となり、プサイを対角化した、

$$\Psi = -\sum_{i}^{n} \lambda_i\frac{y_i^2}{2} \qquad \cdots (1)$$

だけで考えればいいことになる。こうしておけば、直接計算して、

$$\frac{d\Psi(y(t))}{dt} = -\sum_{i}^{n} \lambda_iy_i\frac{dy_i}{dt} \qquad = +\sum_{i}^{n} \lambda_iy_i\frac{\partial\Psi(y)}{\partial y_i} \qquad = -\sum_{i}^{n} \lambda_i^2y_i^2 \leq 0 \qquad \cdots (2)$$

で問題の前半は終わった。

また、任意の $x(x \neq 0)$ に対して $\Psi > 0$ が成り立つとき、(1) 式から λ は負。すると (1) 式の言っていることは、y が中心 y=0 から離れるほど、二次関数的に単調にポテンシャルが増加するということである。式 (2) の意味は、「解曲線に沿ったポテンシャルの時間変化は、マイナス」つまり、「ポテンシャルの低いほうへ y は移動」であるから、解軌道は最もポテンシャルの低い y=0 へ漸近する。

■ 第 2 問 解答

偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(xf) + D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \cdots (1)$$

を考える.
ただし、条件として

- $f, \partial f/\partial x$ が, $x \to \pm\infty$ に対して十分速やかに 0 に収束する.
- D は正の定数

が与えられている.

(1)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dx \qquad \cdots (2)$$

として, $dI/dt = 0$ を示す.

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x}(xf) + D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dx \\ &= \left[xf + D\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{-\infty}^{\infty} \qquad \cdots (3)\end{aligned}$$

条件より,

$$xf \to 0(x \to \pm\infty) \qquad \cdots (4)$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} \to 0(x \to \pm\infty) \qquad \cdots (5)$$

であるから, $\cdots$ (5) に代入して, $dI/dt = 0$ が云える. □

(2)

$$g(x,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-x^2/(2\sigma^2)} \qquad \cdots (6)$$

に対して,

$$\frac{\partial}{\partial x}(xg) + D\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0 \qquad \cdots (7)$$

であるための σ の条件を求める.
計算すると,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{x}{\sigma^2}g \qquad \cdots (8)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{g}{\sigma^2} + \frac{x^2}{\sigma^4}g \qquad \cdots (9)$$

であることから, $\cdots$ (9) にこれらを代入すると,

$$g - \frac{x^2}{\sigma^2} g + D\left[\frac{x^2}{\sigma^4} g - \frac{g}{\sigma^2}\right] = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(1 - \frac{D}{\sigma^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2}\right) g = 0 \qquad \cdots (10)$$

これが x に関わらず成立するので, $1 - D/\sigma^2 = 0$ が云える.

$$\therefore \sigma = \sqrt{D} \ \square \qquad \cdots (11)$$

(3)

ガウス分布関数

$$f(x,t) = g(x - X(t), \sigma(t)) \qquad \cdots (12)$$

が $\cdots$ (12) の解になるための条件を考える.
$\cdots$ (12) の f の微分は

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left[\frac{1}{\sigma(t)^3}\left\{(X(t) - x)^2 \frac{d\sigma}{dt} - \sigma(t)(X(t) - x)\frac{dX}{dt}\right\} - \frac{1}{\sigma(t)}\frac{d\sigma}{dt}\right] g(x - X(t), \sigma(t)) \qquad \cdots (13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x - X(t)}{\sigma(t)^2} g(x - X(t), \sigma(t)) \qquad \cdots (14)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left[\frac{(x - X(t))^2}{\sigma(t)^4} - \frac{1}{\sigma(t)^2}\right] g(x - X(t), \sigma(t)) \qquad \cdots (15)$$

となるので, これを $\cdots$ (15) に代入して,

$$\left(\frac{1}{\sigma(t)^3}\frac{d\sigma}{dt}\right)x^2 + \left(\frac{1}{\sigma(t)^2}\frac{dX}{dt} - \frac{2X(t)}{\sigma(t)^3}\frac{d\sigma}{dt}\right)x + \left\{\left(\frac{X(t)^2}{\sigma(t)^3} - \frac{1}{\sigma(t)}\right)\frac{d\sigma}{dt} - \frac{x(t)}{\sigma(t)^2}\frac{dX}{dt}\right\}$$

$$= \left(\frac{D}{\sigma(t)^4} - \frac{1}{\sigma(t)^2}\right)x^2 + \left(\frac{X(t)}{\sigma(t)^2} - \frac{2DX(t)}{\sigma(t)^4}\right)x + \left\{1 + D\left(\frac{X(t)^2}{\sigma(t)^4} - \frac{1}{\sigma(t)^2}\right)\right\} \qquad \cdots (16)$$

を得るが, これが x によらずに成り立つための条件は各係数が等しいことであるので, 結果として,

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{D}{\sigma} - \sigma \qquad \cdots (17)$$

$$\frac{dX}{dt} = -X \qquad \cdots (18)$$

を得る. $\square$

(4)

常微分方程式 $\cdots$ (18),$\cdot\cdots$ (18) を初期条件 $\sigma(t) = 0, X(t) = 1$ の下で解けばよい.
常微分方程式 $\cdots$ (18) の一般解は,

$$\sigma(t) = \sqrt{D \pm \exp\{-2(t - C)\}} \ (C \text{ は任意定数}) \qquad \cdots (19)$$

であるから, 初期条件より,

$$\sigma(t) = \sqrt{D(1 - \exp(-2t))} \qquad \cdots (20)$$

が解である.
同様にして,

$$X(t) = \exp(-t) \qquad \cdots (21)$$

がわかる.
したがって, $x \to \infty$ で, $\sigma \to \sqrt{D}, X \to 0$ であるから, 確かに解は, $g(x, \sqrt{D})$, すなわち (2) でもとめた定常解に近づくことになる. $\square$