2005 **年度実施 数学 問題**

平成１８年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

英　語　・　数　学

平成１７年８月３０日（火）　　９時００分〜１１時００分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で６問ある。４問のすべてに解答せよ。
4. 答案用紙は数学２枚、英語２枚（罫線入り）が配布されていることを確かめること。
5. 数学の解答は２枚とじ解答用紙に記入し、１問ごとに別のページを用いること。英語の解答は罫線入りの２枚とじ解答用紙に記入し、同じく１問ごとに別のページを用いること。
6. 各答案用紙の所定欄に**科目名**（数学または英語）、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。
7. 答案用紙は点線より切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線の上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名・問題番号・受験番号および氏名を記入して提出すること。
10. 答案用紙を草稿用紙に絶対使用しないこと。

第1問

複素数を成分とする n 行 1 列 $(n \geq 1)$ の縦ベクトル全体の集合 $\mathbb{C}^n$ は、n 次元の複素線形空間をなす。2 つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ について、その内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv \boldsymbol{x}^\dagger \boldsymbol{y}$ にて定義する。ただし、$\boldsymbol{x}^\dagger$ は $\boldsymbol{x}$ のエルミート共役 (転置の複素共役) を表す。$\|\boldsymbol{x}\| \equiv \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ を $\boldsymbol{x}$ のノルムと言う。A を n 行 n 列のエルミート行列とし、その固有値はどれも縮退がないとする。固有値 a に対応する (属する) 規格化された固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_a$ と記す。即ち、

$$A\boldsymbol{u}_a = a\boldsymbol{u}_a, \quad (\boldsymbol{u}_a, \boldsymbol{u}_{a'}) = \delta_{a,a'}.$$

固有値 a は全て実数である。また、全ての a について $\boldsymbol{u}_a$ を集めた集合 $\{\boldsymbol{u}_a\}$ は、$\mathbb{C}^n$ の正規直交完全系を成す。以下の設問に答えよ。

(i) 各固有値 a ごとに、次の行列を定義する:

$$P(a) \equiv \boldsymbol{u}_a \boldsymbol{u}_a^\dagger.$$

このとき、次の等式が成り立つことを示せ:

$$P(a)P(a') \equiv \delta_{a,a'} P(a).$$

(ii) 適当に選んだベクトル $\boldsymbol{x}$ について、もしも $P(a)\boldsymbol{x}$ がゼロベクトルでなければ、$P(a)\boldsymbol{x}$ は固有値 a に対する A の固有ベクトルであることを示せ。

(iii) 次の等式を示せ:

$$A \equiv \sum_a aP(a).$$

即ち、任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ について、$A\boldsymbol{x} = \sum_a aP(a)\boldsymbol{x}$ を示せ。

(iv) 固有値 a の全てについて定義された関数 $f(a)$ を用いて、次の行列 $f(A)$ を定義する:

$$f(A) \equiv \sum_a f(a)P(a).$$

$f(A)$ の固有値と固有ベクトルが、それぞれ $f(a), \boldsymbol{u}_a$ で与えられることを示せ。

(v) A の最小固有値を a_0 とする。適当に選んだベクトル $\boldsymbol{x}$ について、$P(a_0)\boldsymbol{x}$ がゼロベクトルでなかったとする。このとき、

$$\boldsymbol{v} \equiv \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-At}\boldsymbol{x}}{\|e^{-At}\boldsymbol{x}\|}$$

とおくと、n が a_0 に対応する固有ベクトルであることを示せ。ただし、t を任意の実数として、$f(a) = e^{-at}$ と選んだ場合の $f(A)$ を e^{-At} と記した。

第２問

以下の積分を考える。

$$S = \int_{x_0}^{x_1} F(y(x), y'(x))dx. \tag{1}$$

ここで, $y'(x) \equiv dy(x)/dx$ である。また, $F(y, y')$ および $y(x)$ は, いずれの変数についても何回でも微分可能な連続かつ一価な関数とする。さらに, 曲線 $y = y(x)$ の端点は、$y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_l$ のように固定されているものとする。以下の設問に答えよ。

(i) 積分 S が曲線 $y = y(x)$ の変化に対して極値をとるための十分条件となる微分方程式を, 関数 $y(x)$ の微小変分 $\delta y(x)$ を考える事で導出せよ。

(ii) 設問 (i) で求めた微分方程式は,

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C,$$

に変形できることを示せ。ここで, C は定数である。

(iii) 曲線 $y = y(x)$ の両端点が $x_1 > x_0 > 0, y_1 > 0, y_0 > 0$ を満たすとする。この曲線を x 軸のまわりに $360°$ 回転して得られる回転面を考え, その表面積を (1) 式の形の積分を用いて表せ。

(iv) 設問 (iii) で得られた表面積を最小にする曲線 $y = y(x)$ が満たす微分方程式を導け。

(v) 設問 (iv) で得られた微分方程式を解き, 曲線 $y(x)$ を求めよ。

2005 年度実施 数学 解答

第１問　略解

(i)

$$P(a)P(a') = \boldsymbol{u}_a \boldsymbol{u}_a^\dagger \boldsymbol{u}_{a'} \boldsymbol{u}_{a'}^\dagger \tag{2}$$
$$= \boldsymbol{u}_a (\boldsymbol{u}_a, \boldsymbol{u}_{a'}) \boldsymbol{u}_{a'}^\dagger \tag{3}$$
$$= \delta_{a,a'} P(a) \tag{4}$$

(ii)

$$AP(a)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{u}_a \boldsymbol{u}_a^\dagger \boldsymbol{x} = aP(a)\boldsymbol{x} \tag{5}$$

(iii)

$$A\boldsymbol{x} = A\sum_a (\boldsymbol{u_a}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{u_a} = \sum_a a(\boldsymbol{u_a}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{u_a} = \sum_a aP(a)\boldsymbol{x} \tag{6}$$

(iv)

$$f(A)\boldsymbol{u_a} = \sum_{a'} f(a')P(a')\boldsymbol{u_a} \tag{7}$$
$$= \sum_{a'} f(a')\boldsymbol{u}_{a'}\delta_{a,a'} \tag{8}$$
$$= f(a)\boldsymbol{u}_a \tag{9}$$

(v)

$$\boldsymbol{v} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-At}\boldsymbol{x}}{\|e^{-At}\boldsymbol{x}\|} \tag{10}$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\sum_a e^{-at}P(a)\boldsymbol{x}}{\|\sum_a e^{-at}P(a)\boldsymbol{x}\|} \tag{11}$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{e^{a_0 t}\sum_a e^{-at}P(a)\boldsymbol{x}}{e^{a_0 t}\|\sum_a e^{-at}P(a)\boldsymbol{x}\|} \tag{12}$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{P(a_0)\boldsymbol{x} + \sum_{a(\neq a_0)} e^{-(a-a_0)t}P(a)\boldsymbol{x}}{\sqrt{(P(a_0)\boldsymbol{x}, P(a_0)\boldsymbol{x}) + \sum_{a(\neq a_0)} e^{-2(a-a_0)t}(P(a)\boldsymbol{x}, P(a)\boldsymbol{x})}} \tag{13}$$
$$= \frac{P(a_0)\boldsymbol{x}}{\|P(a_0)\boldsymbol{x}\|} \tag{14}$$

第２問　略解

(i) $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$ 及び、$(\delta y)' = \delta y'$ に注意して変形すると

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int_{x_0}^{x_1} \delta F(y(x), y'(x)) dx & (15)\\
&= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F(y(x), y'(x))}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F(y(x), y'(x))}{\partial y'}\delta y' \right) dx & (16)\\
&= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F(y(x), y'(x))}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(y(x), y'(x))}{\partial y'} \right) \delta y dx & (17)\\
&\quad + \left[\frac{\partial F(y(x), y'(x))}{\partial y'}\delta y \right]_{x_0}^{x_1} & (18)\\
&= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F(y(x), y'(x))}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(y(x), y'(x))}{\partial y'} \right) \delta y dx & (19)
\end{aligned}
$$

ここで極値を取るためには

$$
\delta S = 0 \tag{20}
$$

これは

$$
\frac{\partial F(y(x), y'(x))}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(y(x), y'(x))}{\partial y'} = 0 \tag{21}
$$

(ii) F の全微分の式

$$
\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} \tag{22}
$$

に注意して

(20) に y' をかけて (21) を代入すれば

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\partial F}{\partial y} y' - y' \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} &= \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} - y'\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} & (23)\\
&= \frac{d}{dx}\left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) & (24)\\
F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} &= C & (25)
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\int_{x_0}^{x_1} 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx \tag{26}
$$

(iv)

$$
F = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} \tag{27}
$$

を (24) に代入して

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C \tag{28}$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C \tag{29}$$

$$1+y'^2 = \left(\frac{y}{C}\right)^2 \tag{30}$$

(v)

$$\xi = \frac{x}{C} \tag{31}$$

$$\eta = \frac{y}{C} \tag{32}$$

とおくと (29) は

$$\eta^2 = 1+\eta'^2 \tag{33}$$

$y(x)$ が最小値をとる座標を (l, C) とおく ((28) より $y' = 0$ のとき $y = C(> 0)$)
$x \geq l(\xi \geq l/C)$ の場合傾きは正だと考えられるので (32) から

$$\sqrt{\eta^2-1} = \frac{d\eta}{d\xi} \tag{34}$$

$$\int_1^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2-1}} = \int_{l/C}^\xi d\xi \tag{35}$$

$$\ln(\eta+\sqrt{\eta^2-1}) = \xi - l \tag{36}$$

$$\eta = \cosh(\xi - \frac{l}{C}) \tag{37}$$

$$\tag{38}$$

$x \leq l(\xi \leq l/C)$ の場合も同様にして

$$-\sqrt{\eta^2-1} = \frac{d\eta}{d\xi} \tag{39}$$

$$-\int_1^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2-1}} = \int_{l/C}^\xi d\xi \tag{40}$$

$$\eta = \cosh(\xi - \frac{l}{C}) \tag{41}$$

$$\tag{42}$$

よって

$$y = C\cosh(\frac{x-l}{C}) \tag{43}$$