

2005 年度実施 物理学 問題

平成 18 年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

物 理 学

平成 17 年 8 月 30 日 (火) 13 時 00 分 ~ 17 時 00 分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で 6 問ある。第 1 問、第 2 問、第 3 問は全員解答すること。さらに第 4 問、第 5 問、第 6 問の中から 1 問を選んで解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき 1 枚、合計 4 枚配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に科目名（物理学）、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名（物理学）、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配布する。

第1問

1次元系で無限に高い2つの壁にはさまれた領域を考える。1次元の座標を x で表すこととし、壁の位置は $x = -a$ 、及び、 $x = a$ とする ($a > 0$)。そこに質量 m の粒子がある。二つの壁の間の領域でのポテンシャルエネルギーを $U(x)$ と表す。以下の設問に答えよ。ただし、 $\hbar = h/(2\pi)$ (h はプランク定数) とする。

1. この粒子の従う、時間に依存しないシュレーディンガー方程式を示せ。ただし、基底状態から見て第 n 励起状態のエネルギー固有値を E_n とせよ。また、 $n = 0$ は基底状態を表わすとせよ。次に、このシュレーディンガー方程式を解く際の境界条件を述べよ。さらに、

$$U(x) = 0, \quad -a < x < a \quad (1)$$

の場合 (図1参照) について、エネルギー固有値 E_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) を、解を得る概略とともに示せ。固有は導関数 $\phi_n(x)$ を、 $n = 0, 1$ の場合について、具体的に示せ。

2. 設問1の書く固有関数 $\phi_n(x)$ は、座標系の $x \rightarrow -x$ なる変換によってどのように変化するか述べよ。波動関数のそのような性質は、ハミルトニアンなどの普遍性の帰結として起こるのか説明せよ。
3. ポテンシャル $U(x)$ をゼロからわずかにずらす事にする。まず、図2のように、

$$U(x) = 0, \quad -a < x \leq 0 \quad (2)$$

$$U(x) = -w, \quad 0 < x < a \quad (3)$$

とする。 w は所為の実数であるが、絶対値は十分小さいものとする。この時の、 $a = 0$ の状態と $n = 1$ の状態のエネルギー固有値をそれぞれ1次の摂動論で求めよ。

4. 設問3の場合、設問1に比べてポテンシャルがわずかに変わっている。ここで、 $n = 0$ の状態の波動関数を $\psi_0(x)$ とすると、 $\psi_0(x)$ を設問1の $\phi_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) で展開した時の $\phi_0(x)$ と $\phi_1(x)$ の確率振幅を、 w に関して1次の項まで求めよ。
5. 設問1の波動関数 $\phi_0(x)$ に対して座標 x の期待値 $\langle x \rangle$ がどのようになるか、簡単な説明とともに示せ。それは、設問2とはどのような関係にあるのか述べよ。
6. 設問4の波動関数 $\psi_0(x)$ を $\phi_0(x)$ と $\phi_1(x)$ まで展開したのに対して、期待値 $\langle x \rangle$ を w の1次まで示せ。それは、設問2とはどのような関係にあるか述べよ。
7. 十分小さい正の実数 u に対して、次のポテンシャルを考える (図3)。

$$U(x) = -ux/a, \quad -a < x < a \quad (4)$$

この時の、 $n = 0$ の状態と $n = 1$ の状態のエネルギー固有値はそれぞれどのようになるか、 u に関して1次までの効果を述べよ。

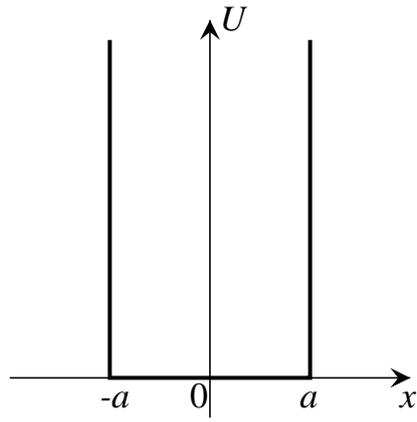


図 1: ポテンシャル (設問 1)

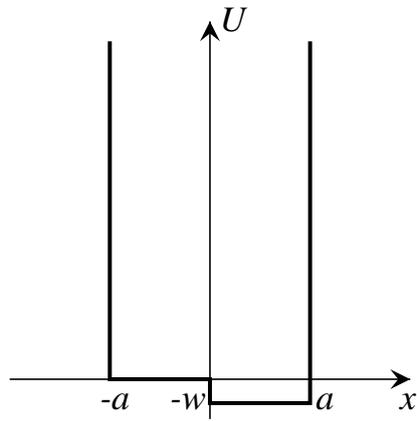


図 2: ポテンシャル (設問 3)

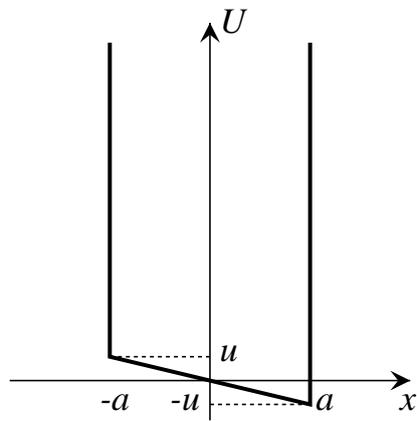


図 3: ポテンシャル (設問 7)

第2問

一辺の長さが L の立方体の箱があって、絶対温度 T の熱浴に接しているとする。箱の中に存在する電磁波が熱浴と熱平衡になっている場合を考える。ただし、ボルツマン定数を k_B とし、 $\hbar = h/2\pi$ とする。

1. 箱の中の異なる角振動数を持つ電磁波は、お互いに独立に振る舞うと考えられる。さらに、ある角振動数 ω を持つ電磁波は、同じ角振動数を持つ量子力学的な調和振動子として扱うことができる。絶対温度 T の場合に、角振動数 ω の調和振動子の分配関数を求めよ。
2. 設問1の調和振動子の平均エネルギーを求めよ。さらに、非常に低温の場合と非常に高温の場合に、平均エネルギーはどのような温度依存性を持つか調べ、その結果について物理的内容を簡潔に説明せよ。
3. 電磁波は箱の中で定在波を作る。壁の位置で節を作るとして、電磁波の波数 $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ のとり得る値を求めよ。
4. 波数 \vec{k} を持つ電磁波の角振動数は、 $k = |\vec{k}|$ として $\omega = ck$ で与えられる。ここで c は光速である。箱内の電磁波の持つ全エネルギーは、すべてのとり得る角振動数についての和として書ける。このとき、全エネルギー E を

$$E = \int_0^\infty \varepsilon(k) dk$$

という形に表したときの $\varepsilon(k)$ を求めよ。ただし、箱の一辺の長さ L は十分長いとして、固有振動についての和を積分の形にしてよい。また、零点振動のエネルギーは無視せよ。(電磁波は横波であり、横波の偏光の方向が2通りあることも考慮せよ。)

5. 全エネルギー E が、どのような温度のべき乗則に従うか求めよ。
6. 非常に低温の場合に、設問4で得られた $\varepsilon(k)$ が極大になる k_{\max} の表式を求めよ。絶対温度が 2.7K のとき、 k_{\max} の波数を持つ電磁波の波長を求めよ。ただし $\hbar = 1.0 \times 10^{-34} \text{ Js}$ 、 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ 、 $k_B = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ を用いて、有効数字2桁で答えよ。

第3問

以下に示す真空中での Maxwell の方程式を出発点として平面電磁波の性質を導き出したい。ここで、 \vec{E} と \vec{B} はそれぞれ電場と磁束密度、 ϵ_0 と μ_0 はそれぞれ真空の誘電率と透磁率である。また、 t は時間であり、 ∇ は空間座標 $\vec{r} = (x, y, z)$ についてのベクトル微分演算子である。電荷や電流の存在しない場合を考える。

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (5)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (7)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8)$$

以下の設問に答えよ。

1. 任意の三次元ベクトル \vec{V} に対して次の公式が成り立つことを示せ。

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$$

2. 前問の公式を Maxwell の方程式に適用して、 \vec{E} に対する波動方程式および \vec{B} に対する波動方程式をそれぞれ導け。
3. 次の式で表される \vec{E} および \vec{B} 、すなわち平面波が前問で求めた波動方程式の解であるための条件を求めよ。ただし、 \vec{E}_0 、 \vec{B}_0 、 \vec{k} 、 \vec{k}' は定数ベクトル、 ω 、 ω' 、 α 、 α' はそれぞれ定数で、 $0 \leq \alpha < \pi$ 、 $0 \leq \alpha' < \pi$ である。

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha) \quad (9)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \alpha') \quad (10)$$

4. 式 (9) と式 (10) で表される \vec{E} および \vec{B} がそれぞれの波数ベクトルに垂直であること、すなわち横波であることを示せ。
5. 式 (9) と式 (10) において、 $\vec{k} = \vec{k}'$ 、 $\omega = \omega'$ および $\alpha = \alpha'$ であることを示せ。
6. 式 (9) と式 (10) で表される \vec{E} と \vec{B} は互いに直交していることを示せ。
7. 平面電磁波の位相速度を求めよ。
8. 式 (9) と式 (10) で電場 \vec{E} と磁場 $\vec{H} (= \vec{B}/\mu_0)$ の大きさの比 $|\vec{E}|/|\vec{H}|$ が常に一定であること、およびこの比は抵抗の次元をもつことを示せ。

第4問

1. π^0 は、静止質量 m_0 、平均寿命 γ を持つ粒子で、主に2個の光子に崩壊する。

π^0 の静止系での4元座標の成分を ct_0, x_0, y_0, z_0 とする。これらは、 π^0 が z 軸方向に速度 $v = c\beta$ で運動している系での座標の成分 ct, x, y, z と、次の式(ローレンツ変換)で関係付けられる。ここで、 c は光速、 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ である。

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

(a) z 軸方向に速度 $v = c\beta$ で運動している系での、 π^0 の4元運動量を求めよ。

(b) この系での、 π^0 の平均寿命と平均飛距離を求めよ。

(c) 運動量 p について $pc=135$ GeV を持つ π^0 の、生成から崩壊までの平均飛距離を有効数字2桁で求めよ。その際、光速 $c = 3.0 \times 10^8$ m/s、 $m_0c^2=135$ MeV、 $\tau = 8.4 \times 10^{-17}$ s を用いよ。また、 $1\text{MeV}=10^6$ eV、 $1\text{GeV}=10^9$ eV である。

2. 高いエネルギーを持つ光子を鉛に入射したときの電磁シャワー過程について考察する。電磁シャワーとは、高いエネルギーを持つ光子からの電子・陽電子対生成過程(図1左)と、高いエネルギーを持つ電子または陽電子からの制動放射過程(図1右)が、原子核近傍の強い電磁場を受けて次々に起こり、雪崩(なだれ)的に粒子数が増大する過程である。ここでは、以下のように単純化したモデルを考える。上述の電子・陽電子対生成過程と制動放射過程のみを考慮する。これらの過程はそれぞれの粒子が物質中を距離 X_0 進む毎に起き、各ステップでの原子核が受ける反跳は無視し、終状態の残りの2粒子は、始状態の粒子の持つエネルギーを等分する。生成粒子は進行方向に放出され、横方向の拡がりはないものとする。

(a) 高いエネルギーの光子を入射する。 n ステップ後の光子数を $G(n)$ 、電子数と陽電子数の和を $E(n)$ として、これららの漸化式を示せ。次に、 $G(n)$ と $E(n)$ の解を求めよ。この際、 $S(n) = G(n)+E(n)$ と $D(n) = 2G(n) - E(n)$ の漸化式を考えてもよい。

(b) エネルギー E_0 の光子を入射したとき、 n ステップ終了時に個々の粒子が持つエネルギーを求めよ。また、物質への入射点から距離 nX_0 までの電子と陽電子の走行距離の総和を求めよ。

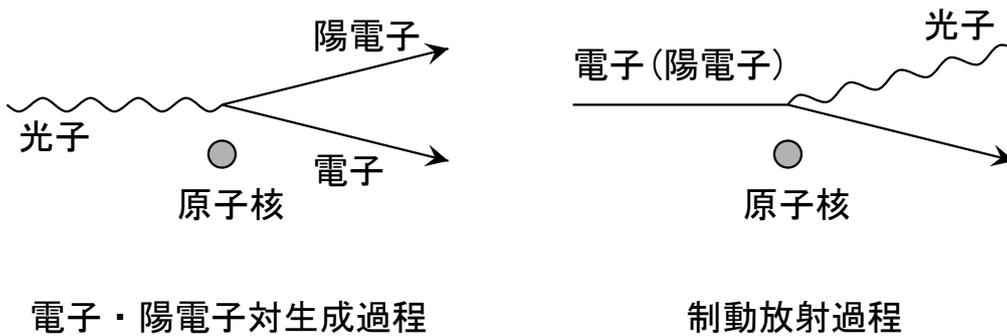


図1 (左) 光子の電子・陽電子対生成過程。(右) 電子及び陽電子の制動放射過程。

- (c) 電磁シャワー過程は、反応で生成される電子・陽電子のエネルギーが小さくなり、電離損失過程が優勢になると、終焉(しゅうえん)に向う。ここでは、簡単のために、生成粒子のエネルギーが E_C 以下となった時点で突然終了するものとする。何ステップで終了するか、エネルギー 1 GeV の光子について計算せよ。次に、電子と陽電子の走行距離の総和を求めよ。その際、 $E_C=7\text{MeV}$ 、 $X_0=5.6\text{ mm}$ を用いよ。また、 $1\text{ MeV}=10^6\text{ eV}$ 、 $1\text{ GeV}=10^9\text{ eV}$ である。
- (d) 電磁力ロリメーターは、電磁シャワーを利用して、光子等のエネルギーを測定する検出器である。実際のエネルギー測定では、電子・陽電子の電離損失過程やチェレンコフ光放出過程を利用して、近似的に電子と陽電子の走行距離の総和を測定する。光子の入射エネルギー 28 MeV ~ 500 MeV の範囲について、入射エネルギーと電子と陽電子の走行距離の総和の関係を略図で示せ。この結果をもとに、単純化した模型の問題点を指摘し、その原因について考察せよ。

第5問

1. (a) 金属中の電子の運動を古典的に自由電子モデルで考え、電気伝導を考察する。外部電場 \vec{E} および外部磁場 (磁束密度 \vec{B}) 中の自由電子の運動方程式を、時刻 t での速度を $\vec{v}(t)$ として、 $d\vec{v}(t)/dt = \dots$ の形式で記せ。ただし、電子の質量を m 、電荷を $-e$ とし、相対論的效果は無視できるとする。
- (b) 金属中では、伝導電子は格子欠陥、不純物、格子振動などによって散乱される。この散乱の効果、平均の電子散乱時間 τ を用いて以下の運動方程式で表す。

$$d\vec{v}(t)/dt = -\vec{v}/\tau \quad (11)$$

金属中の伝導電子の運動方程式は、設問 1(a) で求めた運動方程式の右辺に (11) 式の右辺を加えたものとする。外部磁場がないときに、電場に平行方向の電子の 1 次元運動方程式を解け。速度 v は時刻 $t = 0$ で $v(0) = 0$ とする。ここで、簡単のため金属中の伝導電子の有効質量は m のままとし、電荷は $-e$ とする。また、時刻 $t = \infty$ での定常速度 v_∞ を求めよ。

- (c) 電流密度 j は定常速度 v_∞ と伝導電子密度 n を用いて、 $i = -nev_\infty$ で与えられる。電気伝導度 σ と散乱時間 τ の関係を求めよ。また、散乱時間の温度依存性を考察し、このモデルでは金属の電気伝導度はどのように温度に依存するかを定性的に説明せよ。
 - (d) 直方体の試料を図 2 のようにおき、電流密度 j の電流を x 軸方向に流し、磁束密度 B の外部磁場をそれと垂直な z 軸方向にかけると、双方に垂直な y 軸方向に電位差が生じる。この電位差のために生じる y 軸方向の電場 E_H (ホール電場) を求めよ。ここで、定常状態では、磁場によって電子にかかるローレンツ力が y 軸方向の電場による力とつり合っているとよい。
2. 純粋なシリコン (Si) は真性半導体であり、そのバンドギャップは、1.1 eV である。これに電子を供給するドナー不純物としてリン (P) をドーピングする。リンが供給した電子は基底状態でリン原子に束縛され、そのエネルギー準位は伝導帯の底から 44 meV 下にある。電流密度と磁場を一定にして温度を変化させたとき、リンをドーピングしたシリコンのホール電場はどのように温度に依存するかを図に示して定性的に説明せよ。この場合は、伝導帯に熱励起された電子について設問 1(d) と同じ考え方ができるとしてよい。
 3. ホール電場の大きさを測定するための実験装置及びその配置をブロック図で示し、測定上注意すべき点

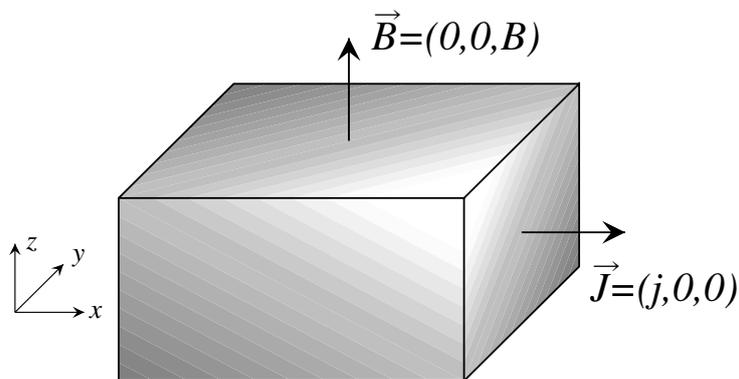


図 2

を簡潔に説明せよ。

第6問

図3のような円柱状の真空容器内に閉じ込められている、電子および水素イオンからなるプラズマの電子温度 T_e を、レーザー光の散乱を用いて計測することを考える。座標系は原点を真空容器の中心とし、 z 軸を円柱の対称軸とする。レーザー光は原点を通り y 軸に沿って入射し、プラズマにより散乱される。散乱光のうち x 軸方向に進む光が集光され、検出されるものとする。電子はレーザーの電場に加速されて振動する。その結果、電磁波が放射され、これが散乱光として観測される。ここでは電子の速度は十分遅く、相対論的效果を無視できる場合を考える。以下の設問に答えよ。

1. なぜ電子による散乱の方がイオンによる散乱より重要か説明せよ。
2. まず1個の電子による散乱を考える。散乱光は電子の運動によりドップラーシフトを受ける。入射光および散乱光の角振動数をそれぞれ ω_i 、 ω_s 、波数ベクトルを \vec{k}_i 、 \vec{k}_s 、電子の速度を \vec{v} とする。ただし、電子の静止系では入射光と反射光の角振動数は変化しないとせよ (Thomson 散乱)。プラズマ中の光速は 3×10^8 m/s としてよい。
 - (a) 入射光は、運動している電子からはどのような角振動数 ω_e で振動しているように見えるか、
 - (b) レーザー光の電場に加速された電子により放射された光は、どのような角振動数 ω_s の散乱光として観測されるか、 ω_s を ω_i 、 \vec{k}_i 、 \vec{k}_s 、 \vec{v} を用いて表せ。
 - (c) 入射光として YAG レーザー (波長 $1.06 \mu\text{m}$) を用いた場合を考える。電子速度の (x, y) 成分が $(3 \times 10^6$ m/s, -3×10^6 m/s) のとき、散乱光は入射光からどちらにどれだけ波長のシフトを受けるか。有効数字1桁で求めよ。

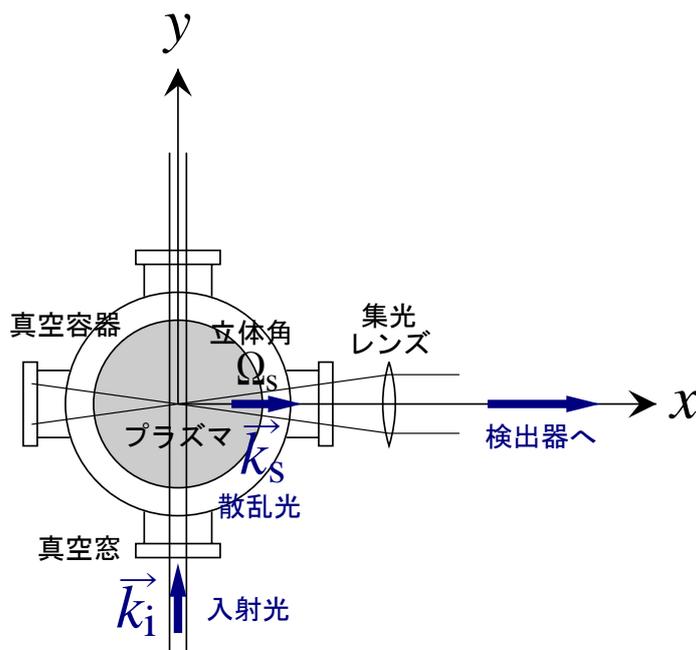


図3

3. 実際観測される散乱光は多数の電子による散乱の寄与を足し合わせて得られる。粒子間の相関は無視できる場合を考えるので、散乱光の干渉は考えなくてよい。電子の速度分布が温度 T_e の Maxwell 分布 $f(\vec{v}) \propto \exp\left(-\frac{m_e|\vec{v}|^2}{2k_B T_e}\right)$ で表されるとき、散乱光の中心角振動数 ω_0 および角振動数ひろがりの幅 $\Delta\omega$ (散乱光強度がピーク値の $1/e$ になるところまでの半幅) を求めよ。ただし m_e は電子の質量、 k_B は Boltzmann 定数である。散乱光の角振動数スペクトルを図示し、 ω_0 および $\Delta\omega$ を図中に示せ。
4. 入射光、散乱光とも z 方向に偏光している場合、 x - y 平面上における微分断面積は $d\sigma/d\Omega_s = r_s^2$ である。但し $r_e = 3 \times 10^{-15}$ m は電子の古典半径である。レーザー光路に沿って $L=1$ cm の長さの領域から立体角 $\Omega_s = 10^{-2}$ sr で散乱光を集める。電子密度が $n_e = 10^{20}$ m $^{-3}$ の場合、検出器に到達する光子数は入射光子数のどのくらいの割合か。有効数字 1 桁で答えよ。
5. 散乱光の波長スペクトルを測る方法を具体的な例をあげて説明せよ。前問で求めたように、プラズマによる散乱光は極めて微弱なので、その検出には注意を要する。真空窓や真空容器壁により散乱または反射された光 (迷光という) を低減する方法を一つ述べよ。

2005 年度実施 物理学 解答

第 1 問 ~ 一次元ポテンシャル、摂動論

1. シュレディンガー方程式は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x)\right)\phi(x) = E_n\phi(x) \quad (12)$$

境界条件は

$$\phi(a) = \phi(-a) = 0 \quad (13)$$

$U(x) = 0$ で

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = -\frac{2mE_n}{\hbar^2}\phi(x) \quad (14)$$

$\phi(a) = \phi(-a) = 0$ となるような解は

$$\phi(x) = A \sin\left(\frac{\pi n_e x}{2a}\right) \quad (15)$$

$$\phi(x) = B \cos\left(\frac{\pi n_o x}{2a}\right) \quad (16)$$

ただし n_e は n のうちの偶数、 n_o は n のうちの奇数。規格化

$$\int_{-a}^a |\phi^2(x)| dx = 1 \quad (17)$$

から

$$\phi_{n_e}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{\pi n_e x}{2a}\right) \quad (18)$$

$$\phi_{n_o}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{\pi n_o x}{2a}\right) \quad (19)$$

ただし、 $n_e = 0$ で $\phi(x) = 0$ なので、基底状態は $n_0 = 1$ 。よって固有関数は $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{\pi(n+1)x}{2a}\right) \quad (n : \text{odd}) \quad (20)$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{\pi(n+1)x}{2a}\right) \quad (n : \text{even}) \quad (21)$$

シュレディンガー方程式に代入して、

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 (n+1)^2}{8ma^2} \quad (22)$$

$n = 0, 1$ から

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \quad (23)$$

$$\phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (24)$$

2. ϕ_n について、偶数の n に関しては偶関数、奇数の n に関しては奇関数である。よって

$$\phi_{n:\text{even}}(-x) = \phi_{n:\text{even}}(x) \quad (25)$$

$$\phi_{n:\text{odd}}(-x) = -\phi_{n:\text{odd}}(x) \quad (26)$$

この性質はハミルトニアン H のパリティ不変性から来ている。実際、パリティ変換 \hat{P} に対して $[H, \hat{P}] = 0$ のとき $\hat{P}H\hat{P} = H$ より

$$\hat{P}H\phi = H\hat{P}\phi = E_n\hat{P}\phi \quad (27)$$

なので

$$\hat{P}H\hat{P}\phi = H\phi = E_n\hat{P}^2\phi = E_n\psi \quad (28)$$

以上から固有値 P として $\hat{P}\phi = P\phi$ とおくと $\hat{P}^2\psi = P^2\psi = \psi$ より $P = \pm 1$ 。よってハミルトニアンがパリティ不変なら波動関数は偶関数または奇関数のいずれか。

3. $U(x)$ を摂動として扱う。エネルギーの 0 次は 1. から

$$E_n^{(0)} = \frac{\pi^2\hbar^2(n+1)^2}{8ma^2} \quad (29)$$

1 次は

$$E_n^{(1)} = \langle \phi_n | U(x) | \phi_n \rangle \quad (30)$$

$n = 0$ では

$$E_0^{(1)} = \int \phi_0(x)U(x)\phi_0(x)dx \quad (31)$$

$$= \int_0^a \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\right)(-w)\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\right)dx \quad (32)$$

$$= \dots \quad (33)$$

$$= -\frac{w}{2} \quad (34)$$

よって

$$E_0 = E_0^{(0)} + E_0^{(1)} = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2} - \frac{w}{2} \quad (35)$$

$n = 1$ では

$$E_1^{(1)} = \int \phi_1(x)U(x)\phi_1(x)dx \quad (36)$$

$$= \int_0^a \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right)(-w)\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right)dx \quad (37)$$

$$= \dots \quad (38)$$

$$= -\frac{w}{2} \quad (39)$$

よって

$$E_1 = E_1^{(0)} + E_1^{(1)} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} - \frac{w}{2} \quad (40)$$

4.

$$\psi_n(x) = \phi_n(x) + \sum_{m \neq n} \frac{\langle \phi_m | U(x) | \phi_n \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \phi_m(x) \quad (41)$$

から

$$\psi_0(x) = \phi_0(x) + \frac{\langle \phi_1 | U(x) | \phi_0 \rangle}{E_0^{(0)} - E_1^{(0)}} \phi_1(x) + O(w^2) \quad (42)$$

確率振幅は、 $\phi_0(x)$ については

$$1 + O(w^2) \quad (43)$$

$\phi_1(x)$ については

$$\frac{\langle \phi_1 | U(x) | \phi_0 \rangle}{E_0^{(0)} - E_1^{(0)}} \quad (44)$$

計算すると、

$$\langle \phi_1 | U(x) | \phi_0 \rangle = \int_0^a \phi_1(-w) \phi_0 dx = \dots = -\frac{4w}{3\pi} \quad (45)$$

$$E_0^{(0)} - E_1^{(0)} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2} - \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = -\frac{3\pi^2 \hbar^2}{8ma^2} \quad (46)$$

よって $\phi_1(x)$ の確率振幅は

$$\frac{-\frac{4w}{3\pi}}{-\frac{3\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}} = \frac{32ma^2 w}{9\pi^3 \hbar^2} \quad (47)$$

5.

$$\langle x \rangle = \langle \phi_0 | x | \phi_0 \rangle \quad (48)$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-a}^a x \cos^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right) dx \quad (49)$$

被積分関数は奇関数なので

$$\langle x \rangle = 0 \quad (50)$$

設問 2 から、すべての ϕ_n は奇関数または偶関数であるから、 $\langle \phi_n | x | \phi_n \rangle$ の被積分関数は必ず奇関数になる。よってすべての n に関して期待値は 0 になる。

なお、波動関数が有界に留まり、ポテンシャルがフラットで x について対称なので、計算するまでもなく x の期待値は常に 0 とわかる。

6. 設問 4 から

$$|\psi_0\rangle = |\phi_0\rangle + a^{(1)} |\phi_1\rangle \quad (51)$$

とおける。ただし

$$a^{(1)} = \frac{32ma^2 w}{9\pi^3 \hbar^2} \quad (52)$$

よって

$$\langle x \rangle = \langle \psi_0 | x | \psi_0 \rangle \quad (53)$$

$$= \langle \phi_0 | x | \phi_0 \rangle + a^{(1)} \langle \phi_1 | x | \phi_0 \rangle + a^{(1)} \langle \phi_0 | x | \phi_1 \rangle + O(w^2) \quad (54)$$

$$= 2a^{(1)} \langle \phi_1 | x | \phi_0 \rangle + O(w^2) \quad (55)$$

ここで

$$\langle \phi_1 | x | \phi_0 \rangle = \frac{1}{a} \int_{-a}^a x \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx \quad (56)$$

これを偶関数であることを用いたり、

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (57)$$

にばらす等して計算すると、

$$\langle \phi_1 | x | \phi_0 \rangle = \frac{32a}{9\pi^2} \quad (58)$$

以上から

$$\langle x \rangle = \frac{2048ma^3w}{81\pi^5\hbar^2} + O(w^2) \quad (59)$$

このポテンシャルは $x > 0$ の方が低く設定されているため、粒子は $x > 0$ に存在しやすく、 x の期待値が正方向にずれた。

7. これまで同様 $U(x)$ を摂動とする摂動論を用いると、

$$E_0^{(1)} = \langle \phi_0 | U(x) | \phi_0 \rangle = -\frac{u}{a^2} \int_{-a}^a x \cos^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right) dx = 0 \quad (60)$$

奇関数の性質を使った。よって

$$E_0 = E_0^{(0)} + E_0^{(1)} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2} \quad (61)$$

同様にして

$$E_1 = E_1^{(0)} + E_1^{(1)} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (62)$$

以上からこのポテンシャルでは u の1次まで考えても、ポテンシャルがない場合とエネルギーは変わらない。

ポテンシャルエネルギーの領域内の総和が変わらなければ、箱を少し傾けたくらいではエネルギーは変化しない(ポテンシャルが対称でないので期待値は当然変化する)。

第2問 ~ 黒体輻射

1.

$$\epsilon_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad (63)$$

より分配関数 Z は

$$Z = \sum_n e^{-\epsilon_n/k_B T} \quad (64)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{(n + \frac{1}{2})\hbar\omega}{k_B T}\right) \quad (65)$$

$$= \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)\right)^n \quad (66)$$

$$= \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)} \quad (67)$$

$$= \left(2 \sinh\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)\right)^{-1} \quad (68)$$

2. 平均エネルギーを $\epsilon(\omega, T)$ とおくと、 $\beta = \frac{1}{k_B T}$ とおいて

$$\epsilon(\omega, T) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \exp\left(-\frac{(n + \frac{1}{2})\hbar\omega}{k_B T}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{(n + \frac{1}{2})\hbar\omega}{k_B T}\right)} \quad (69)$$

$$= \frac{-\frac{d}{d\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta\hbar\omega\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta\hbar\omega\right)} \quad (70)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2} \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \quad (71)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} \quad (72)$$

低温 ($k_B T \ll \hbar\omega$) では Wien 則

$$\epsilon(\omega, T) \simeq \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) \quad (73)$$

$$\simeq \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) \quad (74)$$

高温 ($k_B T \gg \hbar\omega$) では Rayleigh-Jeans 則

$$\epsilon(\omega, T) \simeq \frac{\hbar\omega}{2} + k_B T \quad (75)$$

$$\simeq T \quad (76)$$

物理的内容：低温ではエネルギー準位の量子化が効いて、 ω が大きい、すなわち遷移に必要なエネルギー $\hbar\omega$ が大きい振動子は温度上昇によりエネルギー $k_B T$ を得ても遷移ができず、平均エネルギーの温度上昇による増加は緩やかである。

一方高温では、 $k_B T \gg \hbar\omega$ よりエネルギー準位はほぼ連続的なものとみなすことができ、温度上昇によるエネルギー増加は $k_B T$ がそのまま効く。

3.

$$\vec{k} = \left(\frac{\pi n_x}{L}, \frac{\pi n_y}{L}, \frac{\pi n_z}{L} \right) \quad (77)$$

ただし n_x, n_y, n_z , は正整数。

4. 零点エネルギーを無視。 k から $k + dk$ の間の波数を持つ光子数は、 k 空間で半径 k 、幅 dk の球殻を考え、偏光方向 2 通りを考慮して

$$2 \times \frac{1}{8} \times 4\pi k^2 dk \times \left(\frac{L}{\pi} \right)^3 = \frac{V k^2}{\pi^2} dk \quad (78)$$

ただし $V = L^3$ 。設問 2 より平均エネルギー $\epsilon(\omega, T) = \epsilon(k, T) = \frac{\hbar c k}{\exp(\frac{\hbar c k}{k_B T}) - 1}$ なので

$$E = \int_0^\infty \frac{\hbar c k}{\exp(\frac{\hbar c k}{k_B T}) - 1} \frac{V k^2}{\pi^2} dk \quad (79)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\hbar c V}{\pi^2} \frac{k^3}{\exp(\frac{\hbar c k}{k_B T}) - 1} dk \quad (80)$$

$$\epsilon(k) = \frac{\hbar c V}{\pi^2} \frac{k^3}{\exp(\frac{\hbar c k}{k_B T}) - 1} \quad (81)$$

5. $x = \frac{\hbar c k}{k_B T}$ とおくと

$$E = \frac{V (k_B T)^4}{\pi^2 (\hbar c)^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad (82)$$

よって T の 4 乗に比例 (Stefan-Boltzmann 則)。一応積分の中身を計算すると、リーマンのツェータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (83)$$

とガンマ関数

$$\gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx = (s-1)! \quad (84)$$

から

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty x^3 e^{-nx} dx = \gamma(4)\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15} \quad (85)$$

6. 設問 4 より

$$\epsilon(k) = \frac{\hbar c V}{\pi^2} \frac{k^3}{\exp(\frac{\hbar c k}{k_B T}) - 1} \quad (86)$$

なので

$$\left(\frac{d\epsilon(k)}{dk} \right)_{k=k_{max}} = \frac{\hbar c V}{\pi^2 (\exp(\frac{\hbar c k}{k_B T}) - 1)} (3k^2 e^{\frac{\hbar c k}{k_B T}} - 3k^2 - k^3 \left(\frac{\hbar c}{k_B T} \right) e^{\frac{\hbar c k}{k_B T}}) \quad (87)$$

$$= 0 \quad (88)$$

よって

$$(3k^2 e^{\frac{\hbar c k}{k_B T}} - 3k^2 - k^3 \left(\frac{\hbar c}{k_B T} \right) e^{\frac{\hbar c k}{k_B T}}) = 0 \quad (89)$$

$$x = \frac{\hbar ck}{k_B T} \text{ とおくと } 3e^x - 3 - xe^x = 0 \quad (1 - \frac{x}{3})e^x = 1 \quad (90)$$

非常に低温なとき $e^x \gg 1$ なので $1 - \frac{x}{3} \simeq 0$ 。よって $x \simeq 3$ (実際プログラムに書かせると 2.8 くらい)。

$$k_{max} \simeq \frac{3k_B T}{\hbar c} \quad (91)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_{max}} \simeq 1.7 \times 10^{-3} [m] \quad (92)$$

第3問 ~ 電磁波

1.

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{klm} \partial_l V_m \quad (93)$$

$$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l V_m \quad (94)$$

$$= \partial_i \partial_m V_m - \partial_j \partial_j V_m \quad (95)$$

$$= \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V} \quad (96)$$

ただし

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (97)$$

を用いた。

2. これ以降、 \vec{E} などの上付き矢印をしばしば省略して電場 E 、磁場 B 、波数ベクトル k などと記す。ただし内積、外積に関しては \cdot や \times を明記する。 E について

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) \quad (98)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}) \quad (99)$$

$$= -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (100)$$

$$= \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (101)$$

よって

$$(\nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}) E = 0 \quad (102)$$

B についても同様に

$$(\nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}) B = 0 \quad (103)$$

3. 題の式 (9)(10) を波動方程式に代入すると E について

$$(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}) \sin(k \cdot r - \omega t + \alpha) = 0 \quad (104)$$

よって求める条件は $\omega^2 = c^2 k^2$ 。 B についても同様に $\omega'^2 = c^2 k'^2$ 。

4. Maxwell 方程式 (5)(6) から

$$\nabla \cdot \vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \vec{k} \cos(k \cdot r - \omega t + \alpha) = 0 \quad (105)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \vec{B}_0 \cdot \vec{k}' \cos(k \cdot r - \omega t + \alpha) = 0 \quad (106)$$

これが常に成り立つので

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = \vec{B}_0 \cdot \vec{k}' = 0 \quad (107)$$

よって E と k 、 B と k' は垂直。

5.

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{k} \times \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{B}_0 \omega' \cos(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \alpha') \quad (108)$$

$\vec{k} \times \vec{E}_0$ と $\vec{B}_0 \omega'$ は定数ベクトルだから、これらが常に成り立つためには

$$k = k', \omega = \omega', \alpha = \alpha' \quad (109)$$

6. 設問5の途中式から

$$k \times E_0 = \omega B_0 \quad (110)$$

$$k \times (k \times E_0) = \epsilon_{ijk} k_j \epsilon_{klm} k_l E_{0m} \quad (111)$$

$$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) k_j k_l E_{0m} \quad (112)$$

$$= k_i k_m E_{0m} - k_l k_l E_{0m} \quad (113)$$

$$= k(k \cdot E_0) - k^2 E_0 \quad (114)$$

$$= -k^2 E_0 \quad (115)$$

$$= \omega k \times B_0 \quad (116)$$

よって E_0 と B_0 は垂直で、 E と B は垂直。

7. 位相速度

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{ck}{k} = c \quad (117)$$

8. アンペール則

$$\int_C \vec{B} \cdot ds = \int_S \mu_0 \vec{i} \cdot dS \quad (118)$$

などから $H = B/\mu_0$ の単位は [A/m]。 $V = Ed$ などから $E = V/d$ の単位は [V/m]。 よって E/H の単位は [V/A] すなわち抵抗の単位。

第4問 ~ 特殊相対論、電磁シャワー

1. (a) π^0 の静止系の運動量 p_0^μ は

$$p_0^\mu = \begin{pmatrix} m_0 c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (119)$$

$v = c\beta$ にローレンツブーストすると、

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (120)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma m_0 c \\ 0 \\ 0 \\ \gamma\beta m_0 c \end{pmatrix} \quad (121)$$

(b) t_0 を静止系として

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt_0^2 \quad (122)$$

より

$$dt_0 = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} = dt \sqrt{1 - \beta} = dt/\gamma \quad (123)$$

よって v で運動している系での寿命 τ' は

$$\tau' = \gamma\tau \quad (124)$$

平均飛距離 l' は

$$l' = \gamma\tau v = \gamma\tau c\beta \quad (125)$$

(c) $p_0^\mu p_{0\mu} = p^\mu p_\mu$ から

$$(m_0 c^2)^2 = (\gamma m_0 c^2)^2 - (pc)^2 \quad (126)$$

$$\gamma^2 = 1 + \frac{(pc)^2}{(m_0 c^2)^2} = 1 + 10^6 \quad (127)$$

$$\gamma \simeq 10^3 \quad (128)$$

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{1 + \frac{(pc)^2}{(m_0 c^2)^2}} \quad (129)$$

$$\simeq 1 - 10^{-6} \quad (130)$$

$$\simeq 1 \quad (131)$$

以上から

$$l' \simeq 10^3 \times 8.4 \times 10^{-17} \times 3.0 \times 10^8 \times 1 \quad (132)$$

$$\simeq 2.5 \times 10^{-5} [m] \quad (133)$$

表1 n ステップでの $G(n)$ と $E(n)$

n ステップ数	0	1	2	3	4	5	6	7
$G(n)$	1	0	2	2	6	10	22	42
$E(n)$	0	2	2	6	10	22	42	86

2. (a) 具体的に自分で図を描いて調べてみましょう。すると表1のようになります。1ステップ前に存在する全ての陽電子と電子は1ステップで全て光子になり、光子の発生源はこれだけなので

$$G(n) = E(n-1) \quad (134)$$

陽電子と電子の発生源は、1ステップ前の全ての光子と、1ステップ前の陽電子、電子なので

$$E(n) = 2G(n-1) + E(n-1) \quad (135)$$

設問通り $S(n)$ と $D(n)$ を考えると、上の漸化式を用いて

$$S(n) = G(n) + E(n) = 2(G(n-1) + E(n-1)) = 2S(n-1) \quad (136)$$

$$D(n) = 2G(n) - E(n) = -(2G(n-1) - E(n-1)) = -D(n-1) \quad (137)$$

これらはすぐ解けて、

$$S(n) = 2^n S(0) = 2^n \quad (138)$$

$$D(n) = (-1)^n D(0) = 2(-1)^n \quad (139)$$

これらから $G(n)$ 、 $E(n)$ を構成すると

$$G(n) = \frac{1}{3}(S(n) + D(n)) = \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n) \quad (140)$$

$$E(n) = \frac{1}{3}(2S(n) - D(n)) = \frac{1}{3}(2^{n+1} + 2(-1)^{n+1}) \quad (141)$$

- (b) 全粒子数は $G(n)E(n) = 2^n$ で、崩壊で常にエネルギーを2つの粒子に当分するから、個々の粒子のエネルギーは

$$\frac{1}{2^n} E_0 \quad (142)$$

陽電子と電子の走行距離の総和は

$$\sum_{i=0}^{n-1} E(i)X_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (2^{i+1} + 2(-1)^{i+1})X_0 \quad (143)$$

- (c) 反応は

$$\frac{1}{2^n} E_0 \leq E_c \quad (144)$$

で終了する。よって

$$1000 \leq 7 \times 2^n \quad (145)$$

を初めに満たす整数である8ステップで反応は終了する。電子と陽電子の走行距離は

$$\sum_{i=0}^{8-1} E(i)X_0 = 170X_0 \sim 0.95[\text{m}] \quad (146)$$

表 2 入射エネルギーと走行距離との関係

E_0	28	28-56	56-112	112-224	224-448	448-500
n	2	3	4	5	6	7
走行距離 (概数)[mm]	11	22	56	112	240	470

(d) 入射エネルギー E_0 に対して電子、陽電子の走行距離は

$$2^n \geq \frac{E_0}{7} \quad (147)$$

を初めに満たす整数 n を用いて

$$\sum_{i=0}^{n-1} E(i)X_0 \quad (148)$$

だから、走行距離は表 2 のようになる。図は略。ステップ関数がいくつも繋がった図(バスの料金表みたいなもの)になる。

単純化した模型の問題点は図から、走行距離が離散的であるため特に高い入射エネルギーにおいて、入射エネルギーを増やしても走行距離がなかなか増えない(入射エネルギーに対する走行距離の応答が遅い)。これは 1 ステップで走る粒子の飛距離を一定の X_0 にしたためと考えられる。もし入射エネルギーが高いほど 1 ステップの飛距離が長い(速い粒子は同じ時間で遠くまで飛ぶことに相当)とすれば、エネルギーを高くすると同じステップ数でも走行距離がより長くなるので、図を連続的にとることが可能になる。

第5問 ~ Drude 理論、Hall 効果

1. (a)

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -\frac{e}{m}(\vec{E} + \vec{v}(t) \times \vec{B}) \quad (149)$$

(b)

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -\frac{e}{m}(\vec{E} + \vec{v}(t) \times \vec{B}) - \frac{\vec{v}(t)}{\tau} \quad (150)$$

$\vec{B} = 0$ のとき、電場に平行な方向について

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{e}{m}E - \frac{v}{\tau} \quad (151)$$

一階微分方程式の一般解から

$$v = e^{-\int \frac{dt}{\tau}} \left(\int e^{\int \frac{dt}{\tau}} \left(-\frac{e}{m}E dt \right) + const. \right) = -\frac{e\tau}{m}E + Ce^{-\frac{t}{\tau}} \quad (152)$$

積分定数 C を決めるため、 $t = 0$ で $v(0) = 0$ より

$$0 = -\frac{e\tau}{m}E + C \quad (153)$$

よって

$$v(t) = -\frac{e\tau}{m}E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (154)$$

$$v_{\infty} = -\frac{e\tau}{m}E \quad (155)$$

(c)

$$j = -nev_{\infty} = \frac{e^2\tau n}{m}E \quad (156)$$

電気伝導度 σ は

$$\sigma = \frac{j}{E} = \frac{e^2 n}{m} \tau \quad (157)$$

τ の温度依存性を高温、低温の場合に考える。

高温の場合、格子振動の寄与が大きい。

衝突断面積 S 、電子の平均速度 $\langle v \rangle$ 、フォノンの振幅 a 、フォノンの質量 M として、エネルギー等分配則を使うと

$$\frac{1}{2}M\langle a \rangle^2 = \frac{1}{2}k_B T \quad (158)$$

$$\frac{1}{2}m\langle v \rangle^2 = \frac{1}{2}k_B T \quad (159)$$

$S \propto \langle a \rangle^2$ であり、 $\frac{1}{\tau} \propto (\text{散乱頻度}) \propto S\langle v \rangle \propto T^{3/2}$ なので

$$\tau \propto T^{-3/2} \quad (160)$$

低温の場合、不純物散乱の寄与が大きい。

ラザフォード散乱では

$$S \propto \langle v \rangle^{-4} \quad (161)$$

これを示すのはかなり面倒なので、力学が量子力学の何かの教科書（散乱）を見てください。古典でも量子でも結果は同じです。多分結果を記憶していたほうが良い。

$$\frac{1}{2}m\langle v \rangle^2 = \frac{1}{2}k_B T \quad (162)$$

$\frac{1}{\tau} \propto (\text{散乱頻度}) \propto S\langle v \rangle \propto T^{-3/2}$ なので

$$\tau \propto T^{3/2} \quad (163)$$

ここでは n の温度依存性は無視するようですから、

$$\sigma \propto \tau \quad (164)$$

$$\propto T^{-3/2} \quad (\text{at 高温}) \quad (165)$$

$$\propto T^{3/2} \quad (\text{at 低温}) \quad (166)$$

(d)

$$-e(E_y + v_x B) = 0 \quad (167)$$

$$v_x = v_\infty = -\frac{j}{ne} \quad (168)$$

$$E_H = E_y = -\frac{jB}{ne} \quad (169)$$

2.

$$E_H \propto -\frac{1}{n} \quad (170)$$

なので、 n の温度依存性を考えればよい。高温、中間、低温の3つの領域に分けて考える。

高温領域（真性領域）

ドナーは全て伝導帯へ励起しており、かつ価電子帯からも伝導帯へ励起する領域。

$$\log(n) \propto -\frac{1}{T} \quad (171)$$

中間領域（出払い領域）

ドナーが全て伝導帯へ励起して自由電子として振る舞う。価電子帯からの励起はない領域。

$$\log(n) \sim \text{const.} \quad (172)$$

低温領域（～凍結領域）

十分多数のドナーがイオン化していない（励起していない）領域。

$$\log(n) \propto -\frac{1}{T} \quad (173)$$

図は略します。横軸は T の逆数、縦軸は \log スケールで描くと良いと思います。高温領域の傾きは低温領域の傾きよりも急です。詳しくは固体物理の教科書を参照（H. イバツハ、H. リュート著「固体物理学」12章など）。何故か n の表式を導くヒントが何も与えられていないので、これくらいの特性は覚えているということでしょうか。

3. ブロック図は略します。図の概要のみ述べます。

設問の図 1 の装置（ドーピングした試料）の y - z 面については、片方の面に電流計を挟んで電流源を繋ぎ、もう片方の面は接地します。

z - x 面については、両端を抵抗を挟んで繋ぎ、回路にします。抵抗と並列に電圧計を繋ぎます。

測定上の注意点としては、常に定電流、定磁場をかけて測定すること。ドーピングするドナーは多すぎても少なすぎてもいけない。

第6問 ~ ドップラー効果

1. イオンは電子に比べて十分重いため、イオンの振動は電子に比べ遥かに緩やかで、無視できるから。
2. (a) 入射光を感じる電子は、 y 方向に

$$v_y = \frac{\vec{k}_i \cdot \vec{v}}{|\vec{k}_i|} \quad (174)$$

の速度で動くため、ドップラー効果を考えると

$$\omega_e = \frac{c - v_y}{c} \omega_i \quad (175)$$

$$= \frac{c - (\vec{k}_i \cdot \vec{v})/|\vec{k}_i|}{c} \omega_i \quad (176)$$

- (b) 同様に電子が放射する際は、光源が

$$v_x = \frac{\vec{k}_s \cdot \vec{v}}{|\vec{k}_s|} \quad (177)$$

で動くので、ドップラー効果を考えると、

$$\omega_s = \frac{c}{c - v_x} \omega_e \quad (178)$$

$$= \frac{c}{c - v_x} \frac{c - v_y}{c} \omega_i \quad (179)$$

$$= \frac{c - (\vec{k}_i \cdot \vec{v})/|\vec{k}_i|}{c - (\vec{k}_s \cdot \vec{v})/|\vec{k}_s|} \omega_i \quad (180)$$

- (c)

$$\omega_s = \frac{3 \times 10^8 + 3 \times 10^6}{3 \times 10^8 - 3 \times 10^6} \omega_i \quad (181)$$

$\omega = 2\pi c/\lambda$ から

$$\lambda_s = \frac{2.97}{3.03} \lambda_i \quad (182)$$

散乱光は入射光より $0.02\mu\text{m}$ 短くなる。

3. 電子の平均速度 $\langle \vec{v} \rangle = 0$ より $\omega_0 = \omega_i$ (ドップラーシフトを受けないことに相当)

$$\omega_e = \frac{c - v_y}{c} \omega_0 \quad (183)$$

より

$$v_y^2 = \frac{(\omega_e - \omega_0)^2}{\omega_0^2} c^2 \quad (184)$$

Maxwell 分布で考えるので、電子が v_y で動いているとき (電子に入射する光の角振動数としては ω_e) の入射光の強度 I は

$$I \propto \exp\left(-\frac{m_e v_y^2}{2k_B T_e}\right) \quad (185)$$

$$= \exp\left(-\frac{m_e c^2 (\omega_e - \omega_0)^2}{2k_B T_e \omega_0^2}\right) \quad (186)$$

よって入射光の強度が $1/e$ になるときの ω_e は

$$\frac{1}{e} = \exp\left(-\frac{m_e c^2 (\omega_e - \omega_0)^2}{2k_B T_e \omega_0^2}\right) \quad (187)$$

を満たす。よって入射光の広がり幅 $\Delta\omega_1$ は上の式で $\Delta\omega_1 = \omega_e - \omega_0$ として

$$\Delta\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{2k_B T_e}{m_e c^2}} \quad (188)$$

光が電子に入射する際と、光が電子から放射される際のドップラー広がりと同程度と考えられるので、散乱光の広がり幅 $\Delta\omega_2 = \Delta\omega_1$ である。

最終的に検出される散乱光のスペクトルは、光が電子に入射した際のドップラー広がりと同程度と放射される際のドップラー広がり合成したものを見なすことができる。2つのドップラー広がり合成したスペクトル $G(\omega)$ は入射、放射のスペクトル $G_1(\omega), G_2(\omega)$ を用いて

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\nu) G_2(\omega + \omega_0 - \nu) d\nu \quad (189)$$

と書くことができる。今回の場合

$$G_1(\omega) = G_2(\omega) \quad (190)$$

$$\propto \exp\left(-\frac{m_e c^2 (\omega - \omega_0)^2}{2k_B T_e \omega_0^2}\right) \quad (191)$$

だから、

$$G(\omega) \propto \exp\left(-\frac{m_e c^2 ((\omega - \nu)^2 + (\omega_0 - \nu)^2)}{2k_B T_e \omega_0^2}\right) \quad (192)$$

となる。ガウス積分して整理すると、

$$G(\omega) \propto \exp\left(-\frac{m_e c^2 (\omega - \omega_0)^2}{4k_B T_e \omega_0^2}\right) \quad (193)$$

となるので、この広がり幅 $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ は

$$\frac{1}{e} = \exp\left(-\frac{m_e c^2 (\Delta\omega)^2}{4k_B T_e \omega_0^2}\right) \quad (194)$$

から

$$\Delta\omega = 2\omega_0 \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_e c^2}} \quad (195)$$

2つのガウス型曲線を合成した曲線の幅 $\Delta\omega$ は各々のガウス型曲線の幅 $\Delta\omega_1, \Delta\omega_2$ を用いて

$$(\Delta\omega)^2 = (\Delta\omega_1)^2 + (\Delta\omega_2)^2 \quad (196)$$

となることを知っているより簡単に答えられることに注意。

スペクトルの図は略します。いつものガウス曲線 (縦軸に強度、横軸に ω) を描いて、ピークにあたる ω を ω_0 、強度が $1/e$ になる ω と ω_0 との幅を $\Delta\omega$ とすればよい。

4. 散乱される光子の割合 σ_{total} は

$$\sigma_{\text{total}} = \int n_e \times L \times 10^{-2} \times \frac{d\sigma}{d\Omega_s} d\Omega_s \quad (197)$$

$$= 10^{20} \times 1 \times 10^{-2} \times r_e^2 \times 10^{-2} \quad (198)$$

$$= 9 \times 10^{-14} \quad (199)$$

5. モノクロメータのような分光器で特定の波長の光子を選択し、光電子増倍管などで強度を測定すればよい。

迷光対策：レーザーの太さを絞る、真空容器のサイズを大きくする、真空容器壁を光の反射率が低い材質のもので覆う、など。