平成１９年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

数　　　学

平成１８年８月２９日（火）　１０時００分～１１時００分

【注意事項】

1．試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。

2．解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。

3．問題は全部で２問ある。２問すべてに解答せよ。

4．答案用紙は各問につき１枚、合計２枚配布されていることを確かめること。

5．各答案用紙の所定欄に**科目名**（数学）、**受験番号**、**氏名**、**問題番号**を記入すること。

6．解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。

7．答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。

8．答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。

9．解答できない場合でも、答案用紙に科目名（数学）、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。

10．答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配布する。

第1問

正方行列 A に対して、$U^{-1}AU$ が対角行列になるようなユニタリ行列 U が存在するためには、A が正規行列であることが必要十分である。正規行列とは、$A^*A = AA^*$ を満たす行列であり、A^* は行列 A を転置し複素共役をとった行列である。実ユニタリ行列を直交行列と呼ぶ。以下の設問に答えよ。

1. 行列

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

は直交行列であることを示せ。ここで、θ は実数。

2. 任意の正方行列 A について、

$$\exp A \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$$

は収束し、$\exp A$ を定義することができる。ただし、A^0 は単位行列とする。$A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ のとき、

$$\exp A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = B$$

を示せ。

3. 行列 B を対角化せよ。

次に、一般の次元をもつ行列の例として、変数の組 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ について

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

を考えよう。

4. $|C| \propto \prod_{i<j}(x_j - x_i)$ を示せ。ここで $|C|$ は行列 C の行列式。

5. この結果を用いて、上記の行列 C が正則である（逆行列をもつ）のはどのような場合かを述べよ。

第２問

二つの実変数 x, y の実関数 $u(x,y)$ ， $v(x,y)$ は至るところで有限な値を持ち、任意回微分可能で、さらに関係式

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad , \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \tag{1}$$

を満たしているものとする。

1. 以下の等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0 \quad , \qquad \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}=0 \quad . \tag{2}$$

2. ストークスの定理は、微分可能なベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ の、閉曲線 C を一周する線積分と、C を縁とする面 S 上の面積分との関係を表し、次式で与えられる。

$$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x}=\iint_{\mathrm{S}}[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})]\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})dS \quad . \tag{3}$$

ただし、ベクトル $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ は、面 S 上の点 $\boldsymbol{x}$ におけるこの面の法線ベクトルである。この定理を用いて、xy 平面上の任意の閉じた経路 C に関する線積分に対して、以下の二式が成り立つことを示せ。

$$\oint_{\mathrm{C}}[u(x,y)dx-v(x,y)dy]=0 \quad , \qquad \oint_{\mathrm{C}}[u(x,y)dy+v(x,y)dx]=0 \quad . \tag{4}$$

3. i を虚数単位とし、複素数 z を $z=x+iy$ によって定義する。また、複素関数 $f(z)$ は実関数 $u(x,y)$ ， $v(x,y)$ を用いて、$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ のように表されるものとする。式 (4) が成り立っているとき、複素平面上の任意の閉じた経路 C に関する線積分に対して、以下の等式が成り立つことを示せ。

$$\oint_{\mathrm{C}} f(z)dz=0 \quad . \tag{5}$$

4. 複素関数 $f(z)$ の例として、$f(z)=e^{-z^2}$ を考える。
$f(x+iy)$ の実部を $u(x,y)$ ， 虚部を $v(x,y)$ としたとき、式 (1) が成り立つことを示せ。

5. 以上の結果を用いて、実数 p に対して、定積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2px)dx \tag{6}$$

を求めよ。ただし、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi} \tag{7}$$

となることは既知としてよい。

平成19年数学略解

1

1.1

$$B^tB = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

1.2

$$A^2 = -\theta^2 I \tag{3}$$

なので

$$\exp A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} \tag{4}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^{2m}}{2m!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^{2m+1}}{(2m+1)!} \tag{5}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\theta^2)^m}{2m!} I + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\theta^2)^m}{(2m+1)!} A \tag{6}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2m}}{2m!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2m+1}}{(2m+1)!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = B \tag{8}$$

1.3

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

$$\lambda = e^{\pm i\theta} \tag{10}$$

となるので固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{x}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix} \tag{11}$$

がとれる。

$$U \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{+} & \boldsymbol{x}_{-} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$U^{-1}BU = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \tag{13}$$

1.4

n に関する数学的帰納法で示す：

$$|C| = \prod_{i<j} (x_j - x_i) \tag{14}$$

と仮定する.n=2 のときは成立.
式 (14) が n-1 のとき正しいと仮定する.
第 i 行から第 i-1 行の x_1 倍をひく、という操作を i=n,n-1,,,3,2 の順に行うと

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & x_n \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} \tag{15}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \tag{16}$$

$$= \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \prod_{i,j\geq 2, i<j} (x_j - x_i) = \prod_{i<j} (x_j - x_i) \tag{17}$$

よって $n \geq 2$ のとき式 (14) が成り立つ.

1.5

$|C| \neq 0$であればよいので、任意の互いに異なるi,jについて$x_i \neq x_j$であること.

2

2.1

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y \partial x} = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} = 0 \tag{19}$$

2.2

$$\nabla \times \begin{pmatrix} u(x,y) \\ -v(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{20}$$

$$\nabla \times \begin{pmatrix} v(x,y) \\ u(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{21}$$

2.3

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)dz &= \oint_C \{u(x,y) + iv(x,y)\} d(x+iy) && (22) \\ &= \oint_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i \oint_C u(x,y)dy + v(x,y)dx && (23) \\ &= 0 && (24) \end{aligned}$$

2.4

$$u(x,y) = e^{y^2 - x^2} \cos(2xy) \tag{25}$$

$$v(x,y) = -e^{y^2 - x^2} \sin(2xy) \tag{26}$$

となるので

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = -2xe^{y^2-x^2}\cos(2xy) - 2ye^{y^2-x^2}\sin(2xy) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \tag{27}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 2ye^{y^2-x^2}\cos(2xy) - 2xe^{y^2-x^2}\sin(2xy) = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \tag{28}$$

2.5

$f(z) = e^{-z^2}$ を、p,R を実数として経路 $C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow C_4$ で複素積分する
ただし
$C_1 : -R \rightarrow R$
$C_2 : R \rightarrow R + ip$
$C_3 : R + ip \rightarrow -R + ip$
$C_4 : -R + ip \rightarrow -R$

$$\lim_{R\to\infty}\oint_C f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \oint_{C_3} f(z)dz + \oint_{C_4} f(z)dz \tag{29}$$

R が無限大の極限で経路 C_2, C_4 は無視できるので

$$\lim_{R\to\infty}\oint_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_3} f(z)dz \tag{30}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz + \oint_{\infty+ip}^{-\infty+ip} f(z)dz \tag{31}$$

問題文 (5) より

$$\lim_{R\to\infty}\oint_C f(z)dz = 0 \tag{32}$$

$$\int_{-\infty+ip}^{\infty+ip} e^{-z^2}dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz \tag{33}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ip)^2}dx = \sqrt{\pi} \tag{34}$$

となるので
(34) をもちいて問題文 (6) の定積分を計算すればよい

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2px)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+i2px}dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-i2px}dx\right) \tag{35}$$

$$= \frac{e^{-p^2}}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-ip)^2}dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ip)^2}dx\right) \tag{36}$$

$$= \sqrt{\pi}e^{-p^2} \tag{37}$$