

平成19年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

物 理 学

平成18年8月29日（火） 13時00分～17時00分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で6問ある。第1問、第2問、第3問は全員解答すること。さらに第4問、第5問、第6問の中から1問を選んで解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき1枚、合計4枚配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名(物理学)、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配布する。

第1問

量子論における軌道角運動量 \mathbf{l} は古典論と同様に座標 \mathbf{r} と運動量 \mathbf{p} のベクトル積で与えられる。すなわち $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ である。ここで、それぞれのベクトルの成分は $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$, $\mathbf{l} = (l_x, l_y, l_z)$ である。以下の設問に答えよ。ただし、 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h はプランク定数) を用いよ。

1. l_z と x, y, z との間の交換関係を求めよ。
2. l_z と p_x, p_y, p_z との間の交換関係を求めよ。
3. l_a と l_b との間の交換関係を求めよ。ただし、 $a, b = x, y, z$ である。

量子論では、軌道角運動量 \mathbf{l} を拡張して設問3の交換関係を満たす演算子を角運動量 \mathbf{J} と呼ぶ。以下では、角運動量 \mathbf{J} のみが力学変数である力学系を考える。ここで、変数 A を $A = J_x - iJ_y$, 変数 B を $B = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ と定義する。次の設問に答えよ。

4. $A^\dagger A$ および AA^\dagger を B と J_z を用いて書け。ただし、 A^\dagger は A の複素共役演算子である。
5. B は演算子ではなくただの数であることを示せ。

J_z は固有値を持つと考えて、その固有値を θ_z および固有状態を $|\theta_z\rangle$ とする。次の設問に答えよ。

6. $A|\theta_z\rangle \neq 0$ ならば $A|\theta_z\rangle$ も J_z の固有状態であることを示せ。また、その固有値を求めよ。
7. $\langle \theta_z | A^\dagger A | \theta_z \rangle \geq 0$ と $\langle \theta_z | AA^\dagger | \theta_z \rangle \geq 0$ を用いて、 $-m \leq \theta_z \leq m$ を証明せよ。ただし、 $m = \sqrt{B + \frac{1}{4}\hbar^2} - \frac{1}{2}\hbar$ である。
8. 以上の結果を用いて、 m が \hbar の整数倍であるかまたは半整数倍であることを示せ。

第2問

スピン $1/2$ の粒子が大きさ H の磁場の下におかれると、ゼーマン効果によって、そのエネルギー準位は $-\mu H, +\mu H$ (μ は正の定数) に分裂する。このような粒子 N 個が大きさ H の一様な磁場の下におかれ、温度 T に保たれている系を考え、これをカノニカル分布によって取り扱う。最初は粒子間に相互作用がないとして、以下の設問に答えよ。ただし、 $\beta = (k_B T)^{-1}$ (k_B はボルツマン定数) を用いてもよい。

1. この系の自由エネルギー F を求めよ。
2. 磁場に平行方向の磁化 M と、 $H \rightarrow 0$ での磁化率 χ を求めよ。ただし磁化は $M = -\partial F / \partial H$ 、磁化率は $\chi = \partial M / \partial H$ で定義される。

次に、 N 個の粒子が 2 個ずつ $N/2$ 組の対になり、対を組んだ粒子間にはそれぞれのスピンの内積に比例する相互作用が働く場合を考える。異なる対に含まれる粒子間には相互作用が働かないとする。磁場の方向を z 方向とすれば、一つの対のハミルトニアンは、対に含まれる 2 粒子のスピン演算子 s_1, s_2 とその z 成分 s_{1z}, s_{2z} を用いて、

$$\mathcal{H} = V \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 - 2\mu(s_{1z} + s_{2z})H$$

と書くことができる。 V は相互作用の大きさと符号を表すパラメータである。このとき以下の設問に答えよ。

3. ハミルトニアン \mathcal{H} のエネルギー固有値を求めよ。
4. $N/2$ 組の対からなる系全体の自由エネルギー F を求めよ。
5. 磁場に平行方向の磁化 M と、 $H \rightarrow 0$ での磁化率 χ を求めよ。
6. 設問 5 で求めた磁化率の低温極限 ($k_B T / |V| \ll 1$) での振舞いを調べ、それが V の符号によって定性的に異なる理由を簡単に説明せよ。

第3問

質量 m_1 の太陽と質量 m_2 の地球がお互いの重力によってケプラー運動しているものとする。簡単のために以下では軌道の離心率は無視して円運動の場合のみを考える。それらの公転面上で太陽と地球の重心を原点とする2次元座標系として、慣性系 S と、太陽と地球が常に x 軸上の点 P_1 と点 P_2 に位置するような回転系 S' を考える (図1参照)。太陽と地球の距離を a とすれば、 P_1 と P_2 の座標はそれぞれ $(-\mu_2 a, 0)$ 、 $(\mu_1 a, 0)$ で与えられる。ただし、

$$\mu_1 \equiv \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \mu_2 \equiv \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

である。また、この回転系の角速度 ω はケプラーの第3法則より、

$$G(m_1 + m_2) = \omega^2 a^3 \quad (2)$$

を満たす (G はニュートンの重力定数)。

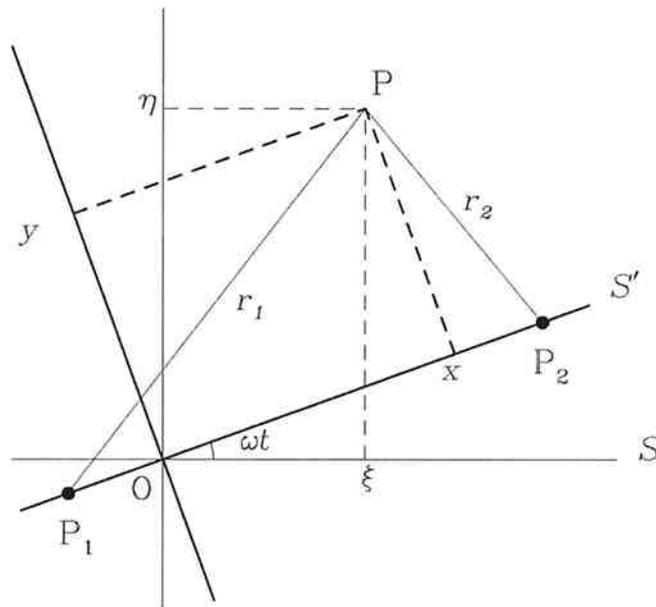


図 1:

1. この平面上の任意の点を P としたとき、 S 系における P の成分 (ξ, η) を S' 系での成分 (x, y) で表わせ。
2. S' 系からみて (x, y) の位置にある質量 m の質点を考える。 m は m_1 および m_2 に比べて十分小さく、この質点は太陽と地球のケプラー運動には影響を与えないとした時、設問1の結果からこの質点に対するラグランジアンが

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + m\omega(xy - \dot{x}y) + Gm \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) \quad (3)$$

となることを示せ。ただし、

$$r_1 \equiv \sqrt{(x + \mu_2 a)^2 + y^2}, \quad r_2 \equiv \sqrt{(x - \mu_1 a)^2 + y^2} \quad (4)$$

である。

3. この質点の S' 系における運動方程式の x 成分および y 成分を書き下せ。
4. S' 系から見たとき、この質点の加速度と速度がともに 0 となるような特別な点 ($\ddot{x} = \ddot{y} = \dot{x} = \dot{y} = 0$) はラグランジュ点と呼ばれ、全部で 5 つあることが知られている。運動方程式の y 成分を考えることで、ラグランジュ点は

$$\mu_1 \left(\frac{a}{r_1} \right)^3 + \mu_2 \left(\frac{a}{r_2} \right)^3 = 1 \quad (5)$$

あるいは

$$y = 0 \quad (6)$$

のいずれかを満たすことを示せ。

5. 式 (6) を満たす S' 系の x 軸上にあるラグランジュ点は、図 2 に示されているように、 P_1 と P_2 の外側に一つずつ、および P_1 と P_2 の中間に一つ、合わせて 3 個存在することが知られている。特に地球からみてちょうど太陽の反対側にある L_2 点は、天文観測衛星に適した位置である。この L_2 点と P_2 との距離を r_2 として運動方程式の x 成分を考えれば、 μ_2/μ_1 が $u \equiv r_2/a$ の関数として

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{3u^3}{(1+u)^2} \frac{1+u+u^2/3}{1-u^3} \quad (7)$$

と書けることを示せ。変形の際、 $\mu_1 + \mu_2 = 1$ であることに注意せよ。

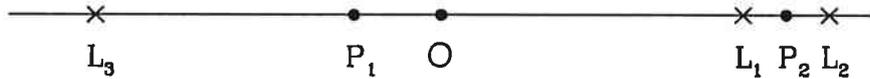


図 2:

6. 式 (7) から、 $\mu_2/\mu_1 \ll 1$ の場合 $u \ll 1$ となることがわかる。この場合、 L_2 点の位置 u を μ_2/μ_1 の最低次で求めよ。特に、太陽と地球の系 ($\mu_2/\mu_1 \approx 3 \times 10^{-6}$ 、 $a = 1.5 \times 10^{11} \text{m}$) の場合、地球と L_2 点までの距離の値を近似的に求めよ。

第4問

中性子と原子核との弾性散乱を利用して中性子を検出したい。これに関連した以下の設問に答えよ。ただし運動はすべて非相対論的に扱えるものとし、必要に応じて、中性子質量 = 陽子質量 = $1000 \text{ MeV}/c^2$ (c は光速)、質量数 A の原子核の質量 = $1000A \text{ MeV}/c^2$ を用いよ。

1. 運動エネルギー T の中性子が、静止した質量数 A の原子核と弾性散乱する際、原子核に与えられる反跳エネルギーの最大値 E_{\max} を求めよ。また E_{\max} は $A = 1$ 、すなわち陽子と散乱する場合に最大となることを示せ。
2. 中性子-陽子の弾性散乱における陽子の反跳エネルギー分布 dW/dE を、以下の手順で求めよ。ここで dW は陽子の反跳エネルギーが E と $E + dE$ との間にある確率である。
 - (a) 陽子の反跳エネルギー E を、中性子のエネルギー T と重心系での散乱角 θ^* (図1参照) で表せ。
 - (b) 散乱は重心系において等方的、すなわち $d\sigma/d\Omega^* = \text{一定}$ であるとする。ただし σ は散乱断面積、 Ω^* は重心系での立体角である。設問2(a) で求めた E と θ^* の関係を利用して dW/dE を求め、その概略を図示せよ。

以下では、中性子検出器として、プラスチック・シンチレーター (密度 1 g/cm^3 、元素組成が $\text{C}:\text{H} = 1:1$ である蛍光物質) と光電子増倍管を組み合わせたものを用いる場合を考える。ただし、中性子と炭素の衝突による効果は無視でき、また、検出器は反跳陽子を 100% の効率で検出できるものとする。次の設問に答えよ。

3. この検出器に中性子が入射してから光電子増倍管から電気信号が出るまでの過程を 200 字以内で記述せよ。
4. シンチレーター中での中性子の平均自由行程 λ を、中性子と陽子の弾性散乱断面積 σ と単位体積あたりの水素原子数 n を用いて表せ。
5. シンチレーターの厚さが x の場合の中性子検出効率 (検出器が厚い場合にも適用できる一般式) を、 λ と x を用いて表せ。
6. 図2に示す中性子と陽子の弾性散乱断面積のグラフを用いて、厚さ 10 cm のプラスチック・シンチレーターの、運動エネルギー 20 MeV の中性子に対する検出効率を精度一桁で概算せよ。必要に応じてアボガドロ数 $N_A = 6 \times 10^{23}$ を用いよ。

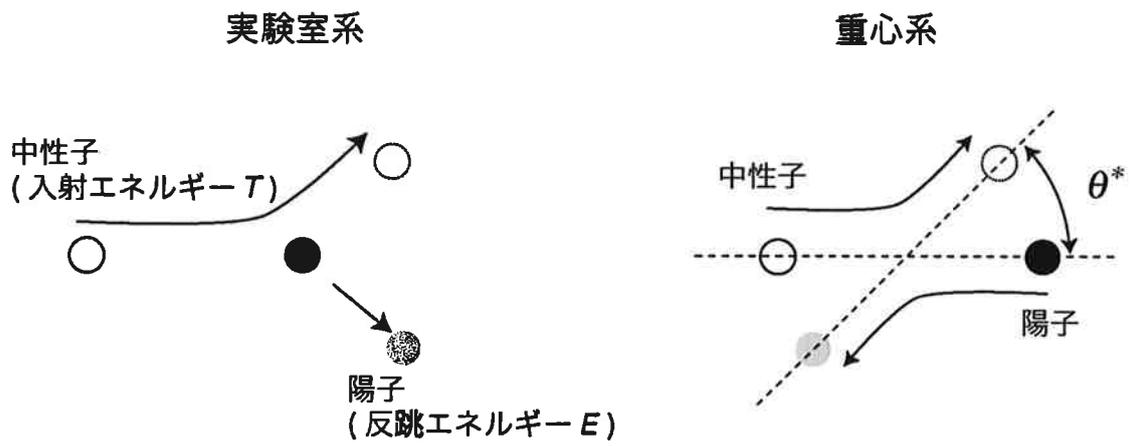


図 1:

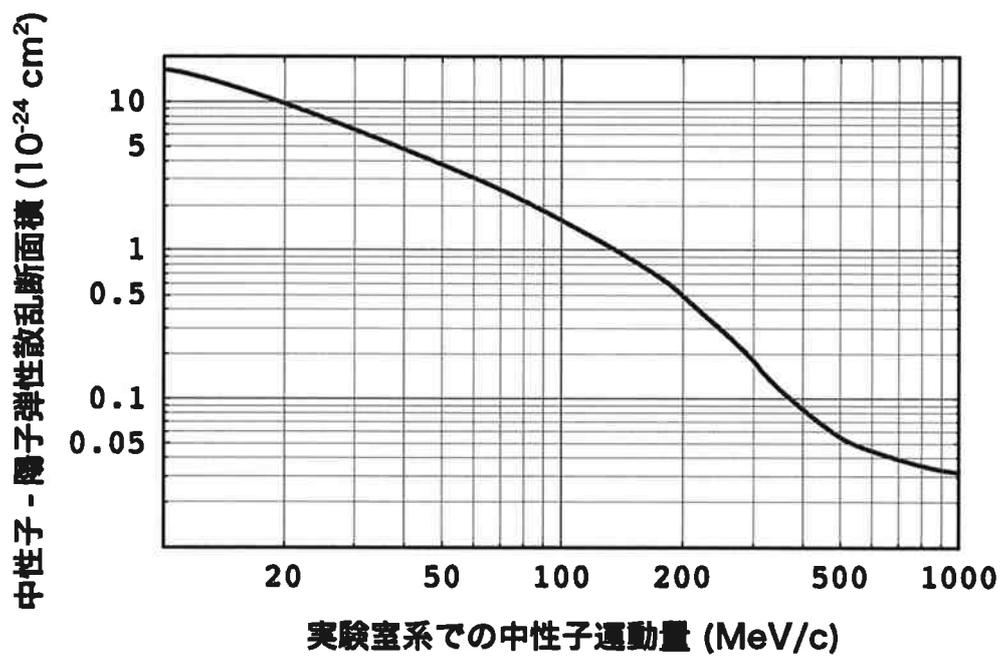


図 2:

第5問

比熱測定は物質のエントロピーや内部エネルギー、さらには相転移現象について有用な情報が得られる実験手段である。低温での比熱測定に関連して以下の設問に答えよ。

1. 一般に固体の比熱は図1に示すような装置を用いて測定できる。ヒーターおよび抵抗温度計が取り付けられた基板の上に試料を乗せ、ヒーターで一定の熱量を加えたときの温度上昇から比熱が求まる。この測定を精度良く行うために実験上注意すべき点を200字以内で述べよ。

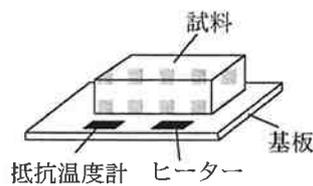


図1:

2. 比熱 $C(T)$ を用いてエントロピー $S(T)$ および内部エネルギー $U(T)$ を表せ。ただし、 $T = 0$ での内部エネルギー $U(0)$ を使い、また $S(0) = 0$ とせよ。
3. 図1の装置を用いてアルミニウムの1モル当たりの比熱 C を温度範囲 $1.22 \text{ K} \leq T \leq 4 \text{ K}$ で測定した結果を、縦軸に C/T 、横軸に T^2 をとって図2に○印で示す。この図から $C(T)$ には格子振動を起源とする T^3 に依存する項の他に、より主要な寄与があることがわかる。その温度依存性と係数、およびその起源を答えよ。

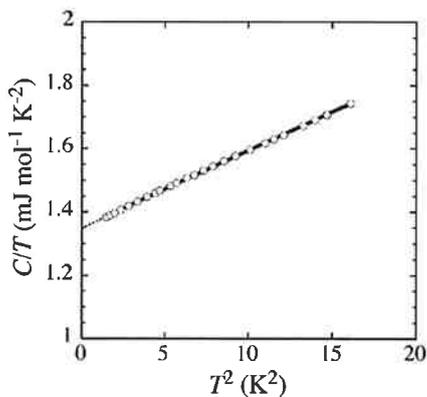


図2:

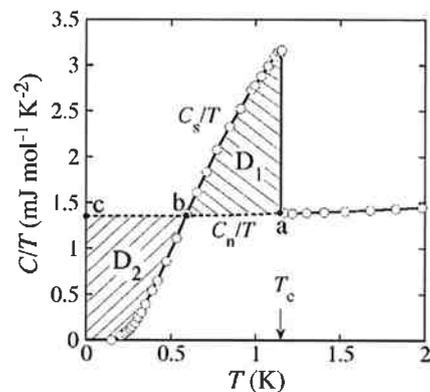


図3:

アルミニウムの比熱をより低温の 0.2 K まで測定した結果について縦軸に C/T 、横軸に T をとって描いたものを図3に示す。この図の点線 (a-b-c) は図2のデータを低温まで外挿したもので、通常の金属で期待される振舞いである (正常状態と呼ぶ)。実際の測定データはこの延長線上には乗らず、転移温度 $T_c = 1.16 \text{ K}$ で2次相転移 (超伝導転移) による飛びを示した。ここで C_s 、 C_n はそれぞれ超伝導状態および正常状態における比熱を表す。

4. T_c における相転移が2次相転移であることを注意して、図3の領域 D_1 と領域 D_2 の面積が等しくなることを示せ。

超伝導状態にあるアルミニウムに大きさ H の磁場をかけると、ある磁場で超伝導が壊れて正常状態に1次相転移する。このときの磁場を臨界磁場 H_c と呼ぶ。次にこの相転移を熱力学的に考察しよう。磁場中における、正常状態および超伝導状態の自由エネルギー $G_n(T, H)$ 、 $G_s(T, H)$ は次式で与えられる。

$$G_{n,s}(T, H) = G_{n,s}(T, 0) - V \int_0^H B dH \quad (8)$$

ここで V はアルミニウムのモル体積、 B は試料内の磁束密度を表し一様とする。そして正常状態では $B = \mu_0 H$ ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m)、超伝導状態では $B = 0$ であるとする。 $G_n(T, 0)$ 、 $G_s(T, 0)$ は $G = U - TS$ の関係式を使って比熱の測定データから求めることができる。その温度依存性を示したものが図4である。ただし $G_n(0, 0) = 0$ とした。

5. $G_n(T, H)$ および $G_s(T, H)$ の磁場依存性を表す式を示せ。また図4を参考に一定磁場 H のもとでの G_n と G_s の温度依存性を図示して、この相転移が1次転移である理由を述べよ。ただし $G_n(0, H) > G_s(0, H)$ が成り立つ磁場範囲について答えよ。
6. $T = 0$ におけるアルミニウムの臨界磁束密度 $B_c(0) = \mu_0 H_c(0)$ を図4のデータをもとに有効数字1桁で求めよ。ただし、アルミニウムのモル体積は $10 \text{ cm}^3/\text{mol}$ とする。
7. この様にして求めたアルミニウムの臨界磁場の温度依存性を図5に示す。 $T/T_c \ll 1$ では $H_c(T) = H_c(0)(1 - aT^2)$ (a は定数) となることが知られている。正常状態の C/T の $T = 0$ への外挿値を γ 、また $\delta = G_n(0, 0) - G_s(0, 0)$ として、 a を γ および δ を用いて表せ。

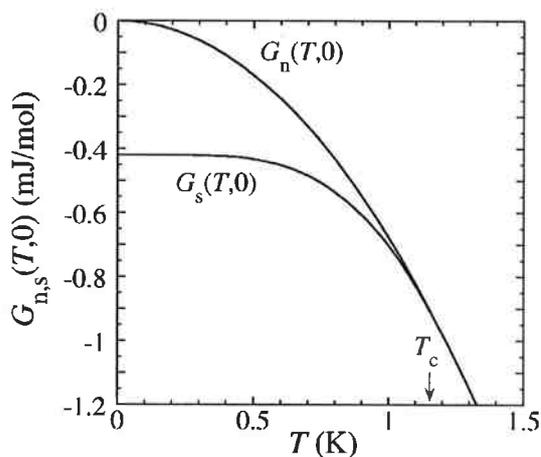


図4:

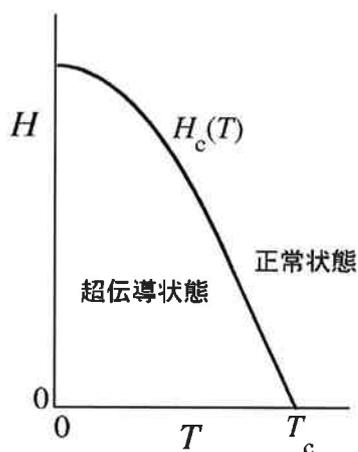


図5:

第6問

図1は、水素原子の主量子数 $n = 2$ のエネルギー準位構造を示している。 $2P_{3/2}(j = 3/2)$ と $2S_{1/2}(j = 1/2)$ とのエネルギー差を $h\nu_1$ 、 $2S_{1/2}(j = 1/2)$ と $2P_{1/2}(j = 1/2)$ とのエネルギー差を $h\nu_2$ とする。ただし、 h はプランク定数、 j は電子の軌道角運動量 l とスピン角運動量 s を合成した角運動量 $j = l + s$ の大きさを \hbar を単位として表した量子数である。

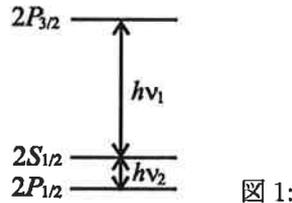


図1:

図2(a)は、このエネルギー差 $h\nu_1$ 、 $h\nu_2$ を精密に測定するための実験装置である。 $1S_{1/2}$ にある水素原子を、電子線との衝突により $2S_{1/2}$ へ励起する。 $2S_{1/2}$ は寿命が $2P_{1/2}$ 、 $2P_{3/2}$ に比べ著しく長いため、 $1S_{1/2}$ に遷移する前に金属板に衝突する。そのとき放出される電子を対向電極（正極）で捕らえることにより、 $2S_{1/2}$ にある原子数を検流計の電流値として観測することができる。導波管内で原子に照射するマイクロ波の周波数が、例えば ν_1 に一致（共鳴）すると、図2(b)に示すように $2P_{3/2}$ への遷移が起き、この準位からは速やかに $1S_{1/2}$ へ自発放射により遷移するため、金属板から電子が放出されず検流計の電流値は減少する。

- この実験装置では、電子線発生器のグリッド、アノードは接地されている。フィラメント（カソード）の電位は何Vに設定するのが適当か、理由と共に答えよ（ヒント：水素原子のイオン化エネルギーは 13.6 eV）。
- 一般に、原子が自発放射によって遷移する確率は、始状態と終状態の間の電気双極子モーメントの大きさの2乗に比例する。 $2S_{1/2}$ の寿命が $2P_{1/2}$ 、 $2P_{3/2}$ に比べ著しく長い理由を簡潔に述べよ。

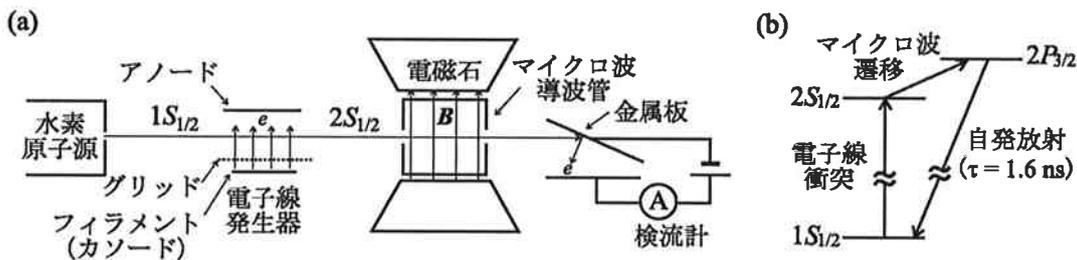


図2:

電磁石を用いて導波管内に外部磁場を印加すると、 $2S_{1/2}$ 、 $2P_{3/2}$ の磁気副準位のエネルギーはゼーマンシフトする。外部磁場と水素原子との相互作用（ゼーマンエネルギー）を表すハミルトニアンは、磁場の向きを z 軸にとれば、

$$\mathcal{H}_Z = \frac{\mu_B}{\hbar}(l_z + 2s_z)B$$

と表される。ただし、 μ_B はボーア磁子、 B は磁場（磁束密度）の大きさである。図 3(a) に $2S_{1/2}$ 、 $2P_{3/2}$ の磁気副準位のゼーマンシフトの様子を示す（縦軸の目盛は省略されている）。図中の m は角運動量 j の磁気量子数を表す。

3. マイクロ波遷移 $\alpha(2S_{1/2}, m = 1/2) \rightarrow a(2P_{3/2}, m = 3/2)$ の共鳴周波数のゼーマン効果による変化量を $\Delta\nu$ とする。 $\Delta\nu$ の磁場依存性を μ_B, B を用いて表せ。
4. 図 3(b) は、マイクロ波周波数 11.5 GHz において、磁場の大きさを変化させながら検流計の電流値の減少量を測定して得られたマイクロ波遷移 $\alpha \rightarrow a$ の共鳴曲線である。この実験結果、および設問 3 の結果を用いて、 ν_1 の値を有効数字 2 桁で計算せよ（ヒント： $\mu_B/h \approx 14$ GHz/T）。
5. $2P_{3/2}$ 準位の寿命 ($\tau = 1.6$ ns) で決まるマイクロ波遷移 $\alpha \rightarrow a$ の共鳴曲線の線幅を有効数字 2 桁で計算せよ。図 3(b) で観測された共鳴曲線の線幅は、 $2P_{3/2}$ 準位の寿命で決まる線幅よりも広い。その要因として考えられるものを挙げよ。

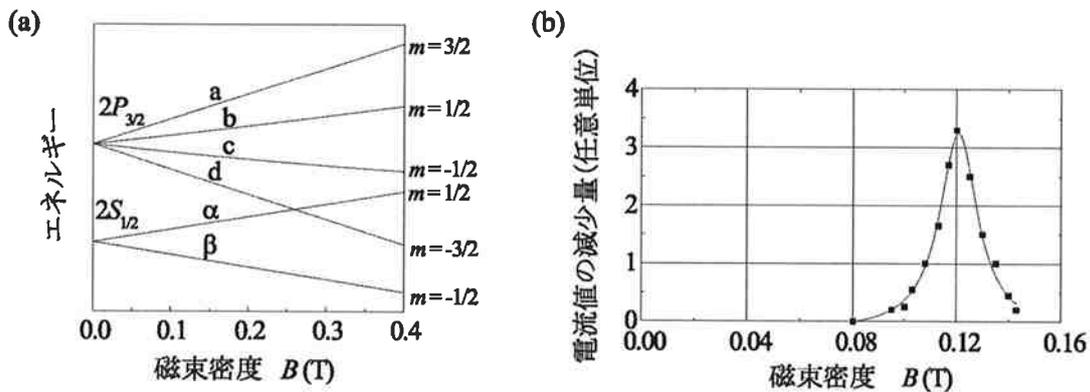


図 3:

1947 年、Lamb と Retherford は図 2(a) の実験装置を用いて、 ν_1 と同時に ν_2 の値も精密に測定し、Dirac の相対論的電子論では縮退すると予想されていた $2S_{1/2}$ および $2P_{1/2}$ 準位が、実際には分裂していることを確認した。この分裂はラムシフトと呼ばれている。

6. ラムシフトは、電磁場の真空揺らぎ（零点振動）によって点電荷が実効的に有限な広がりを持つと考えることによって定性的に説明できる。この考え方を用いて、ラムシフトにより $2S_{1/2}$ のエネルギーが $2P_{1/2}$ よりわずかに高くなる理由を述べよ。

第 1 問

1. 2. 3. 角運動量 $l_a = \epsilon_{acd} x_c p_d$ と、座標 x_b の交換関係は次のように計算できます*1.

$$[l_a, x_b] = \epsilon_{acd} [x_c p_d, x_b] = \epsilon_{acd} (x_c [p_d, x_b] + [x_c, x_b] p_d) = \epsilon_{acd} x_c (-i\hbar \delta_{db}) = i\hbar \epsilon_{abc} x_c.$$

以下同様に計算すれば、次が得られます.

$$[l_a, x_b] = i\hbar \epsilon_{abc} x_c,$$

$$[l_a, p_b] = i\hbar \epsilon_{abc} p_c,$$

$$[l_a, l_b] = i\hbar \epsilon_{abc} l_c.$$

4.5. 計算は簡単なので結論だけ述べると、

$$A^\dagger A = B - J_z^2 + \hbar J_z,$$

$$AA^\dagger = B - J_z^2 - \hbar J_z$$

となります. また $[B, J_a] = 0$ がわかり, B は全ての力学変数 J_a と交換するので, B は演算子としては c -数です.

6. $[J_z, A] = -\hbar A$ と計算でき, $J_z \cdot A |\Theta_z\rangle = (AJ_z - \hbar A) |\Theta_z\rangle = (\Theta_z - \hbar) A |\Theta_z\rangle$ となるので, $A |\Theta_z\rangle$ は固有値 $\Theta_z - \hbar$ を持ちます. 同様に $A^\dagger |\Theta_z\rangle$ も固有値 $\Theta_z + \hbar$ を持ちます.

7. 問題 4. の結果を使うと、

$$\langle \Theta_z | A^\dagger A |\Theta_z\rangle = B - (\Theta_z^2 - \hbar \Theta_z) = (m + \Theta_z)(m - \Theta_z + \hbar),$$

$$\langle \Theta_z | AA^\dagger |\Theta_z\rangle = B - (\Theta_z^2 + \hbar \Theta_z) = (m - \Theta_z)(m + \Theta_z + \hbar)$$

が得られます. ここで $B = m(m + \hbar)$ を使いました. これらはそれぞれ $A |\Theta_z\rangle, A^\dagger |\Theta_z\rangle$ のノルム 2 乗なので ≥ 0 です. これを連立すれば $-m \leq \Theta_z \leq m$ が得られます.

8. 問題 6. と問題 7. を総合すると、

$$\begin{aligned} A |\Theta_z\rangle &= \sqrt{(m + \Theta_z)(m - \Theta_z + \hbar)} |\Theta_z - \hbar\rangle, \\ A^\dagger |\Theta_z\rangle &= \sqrt{(m - \Theta_z)(m + \Theta_z + \hbar)} |\Theta_z + \hbar\rangle \end{aligned} \quad (1)$$

となることにまず注意します. 今 Θ_z には上限と下限があることが分かったので, Θ_z の最大値 Θ_{\max} , 最小値 Θ_{\min} とします. このとき $|\Theta_{\max}\rangle, |\Theta_{\min}\rangle$ はそれぞれ, A^\dagger, A を施して新しい状態を作ってはならないので, 式 (1) から

$$(m - \Theta_{\max})(m + \Theta_z + \hbar) = 0, \quad (m + \Theta_{\min})(m - \Theta_{\min} + \hbar) = 0$$

を満たす必要があります. この解は, $\Theta_{\max} = m, \Theta_{\min} = -m$ となります.

また, $|-m\rangle$ の状態に次々に A^\dagger を作用させていくと, 固有値が \hbar ずつ上昇していきませんが, もしこれで $|m\rangle$ に到達しなければ, 式 (1) にしたがっていくらでも大きな固有値を持つ状態が生まれてしまうので不適です. ゆえに, $-m$ と m の間はちょうど, \hbar の整数倍だけ空いていなければならないので, $2m = \hbar \times (\text{整数})$ が成立します.

*1 以下, 連続した添え字は和を取ります. 当然 a, b, c, \dots は x, y, z のことです.

第2問

1. 相互作用が無い N 粒子系なので、分配関数 Z は次のように計算されます。

$$Z = \sum_{i:\text{all state}} e^{-\beta E_i} = \left(\sum_{i:1 \text{ particle state}} e^{-\beta \epsilon_i} \right)^N = (2 \cosh \beta \mu H)^N.$$

したがって自由エネルギーは $F = -\frac{1}{\beta} \ln Z = -\frac{N}{\beta} \ln(2 \cosh \beta \mu H)$.

2. 計算だけなので結果だけ記すと

$$M = -\frac{\partial F}{\partial H} = \mu N \tanh \beta \mu H,$$

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \beta \mu^2 N \frac{1}{\cosh^2 \beta \mu H} \xrightarrow{H \rightarrow 0} \beta \mu^2 H.$$

3. $S = s_1 + s_2$ と置くと、ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = V \frac{S^2 - s_1^2 - s_2^2}{2} - 2\mu S^z H$$

とかけます。2 粒子の s_1^z, s_2^z に関する固有状態 $|s_1^z\rangle |s_2^z\rangle$ を、合成角運動量 S^2, S^z の固有状態 $|S, S^z\rangle$ に取り直せば、 \mathcal{H} の固有状態になることが分かります。結果は次の通りです。

表1 ハミルトニアン \mathcal{H} の固有状態と固有値

	$S(S+1)$	S^z	$s_i(s_i+1)$	\mathcal{H}
$ 1, 1\rangle$	2	1	3/4	$\frac{V}{4} - 2\mu H$
$ 1, 0\rangle$	2	0	3/4	$\frac{V}{4}$
$ 1, -1\rangle$	2	-1	3/4	$\frac{V}{4} + 2\mu H$
$ 0, 0\rangle$	0	0	3/4	$-\frac{3V}{4}$

4.5. ペア固有エネルギーが求まったので、分配関数は

$$Z = \left(\sum_{i:\text{pair state}} e^{-\beta \epsilon_i} \right)^{N/2} = \dots = \left(2e^{-\beta V/4} \cosh 2\beta \mu H + 2e^{\beta V/4} \cosh \frac{\beta V}{2} \right)^{N/2}$$

と求まり、自由エネルギー F 、磁化 M 、磁化率 χ は次のように計算されます。

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z = -\frac{N}{2\beta} \ln \left(2e^{-\beta V/4} \cosh 2\beta \mu H + 2e^{\beta V/4} \cosh \frac{\beta V}{2} \right),$$

$$M = -\frac{\partial F}{\partial H} = \mu N \frac{\sinh 2\beta \mu H}{\cosh 2\beta \mu H + \frac{1}{2}(1 + e^{\beta V})},$$

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} \xrightarrow{H \rightarrow 0} = \frac{4\beta \mu^2 N}{3 + e^{\beta V}}.$$

6. V の正負で χ の低温極限を見てみると

$$\chi \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & (V > 0) \\ \beta\mu^2 N & (V = 0) \\ \frac{4}{3}\beta\mu^2 N & (V < 0) \end{cases}$$

となります。 $V = 0$ はペア間の結合がない、問題 2. の再現です。

$T = 0$ における基底状態をみるために、 $H = 0$ でのペア状態のエネルギー固有値の表 1 を見てみます。

$V > 0$ の時は、1 重項 $|0,0\rangle$ が最もエネルギーが低いので、 $T = 0$ ではこの状態が選ばれます。こうしてスピンの 2 粒子分子が並ぶので、磁場に対する応答は生じず $\chi = 0$ です。

$V < 0$ のときは、3 重項 $|1, S^z\rangle$ が基底状態に選ばれます。今度はスピン 1 の 2 粒子分子が並ぶこととなります。この 3 つの準位は外部磁場によってエネルギー分岐を起して常磁性を生じます。

たしかめ 上で導いた χ の係数^{*2}は、実際にスピン $S = 1$ の粒子を $N' = N/2$ 個並べてみれば分かります。

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^{N'} \mu' \hat{s}_n^z \cdot H$$

なるハミルトニアンで、 \hat{s}_n^z の固有値 $-S, -S+1, \dots, S-1, S$ を考えるよくあるモデルを考えると、単純な計算で次が分かります。

$$Z = \left[\frac{\sinh \frac{2S+1}{2} \beta\mu'H}{\sinh \frac{1}{2} \beta\mu'H} \right]^{N'}$$

$$F = -\frac{N'}{\beta} \ln \frac{\sinh \frac{2S+1}{2} \beta\mu'H}{\sinh \frac{1}{2} \beta\mu'H}$$

$$M = \mu' N' \left[\frac{2S+1}{2} \coth \left(\frac{2S+1}{2} \beta\mu'H \right) - \frac{1}{2} \coth \left(\frac{1}{2} \beta\mu'H \right) \right]$$

$$\chi \xrightarrow{H \rightarrow 0} \frac{S(S+1)}{3} \beta\mu'^2 N'$$

問題 6. の $V < 0$ を再現するには、 $S = 1, \mu' = 2\mu, N' = N/2$ とすれば $\chi \rightarrow (4/3)\beta\mu^2 N$ が出ます。

$V = 0$ は $S = 1/2, \mu' = 2\mu, N' = N$ とすれば再現されます。

^{*2} 最初に up したものが計算ミスの指摘をうけたので、別の方法で確かめました。川瀬君 thanks.

第3問

1. ベクトル (ξ, η) は、ベクトル (x, y) を $+\omega t$ 回転させたものなので

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

2. 慣性系 S でのラグランジアン $\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + Gm \frac{m_1}{|PP_1|} + Gm \frac{m_2}{|PP_2|}$ を、前問の関係式を使って書き直すだけです。

3. Lagrange 方程式 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ を $q = x, y$ について立てます。結果は次のようになります。

$$0 = m\ddot{x} - 2m\omega\dot{y} - m\omega^2 x + Gmm_1 \frac{x + \mu_2 a}{r_1^3} + Gmm_2 \frac{x - \mu_1 a}{r_2^3}, \quad (2)$$

$$0 = m\ddot{y} + 2m\omega\dot{x} - m\omega^2 y + Gmm_1 \frac{y}{r_1^3} + Gmm_2 \frac{y}{r_2^3}. \quad (3)$$

4. 式 (3) で、時間微分をゼロと置けば

$$y \left(-\omega^2 + \frac{Gm_1}{r_1^3} + \frac{Gm_2}{r_2^3} \right) = 0$$

という式を得ますが、 $m_1 G = \mu_1 \omega^2 a^3$, $m_2 G = \mu_2 \omega^2 a^3$ に注意すれば

$$y \left(-1 + \mu_1 \frac{a^3}{r_1^3} + \mu_2 \frac{a^3}{r_2^3} \right) = 0, \quad \therefore y = 0 \text{ または } \mu_1 \frac{a^3}{r_1^3} + \mu_2 \frac{a^3}{r_2^3} = 1.$$

5. 式 (2) で、時間微分と y をゼロとおくと

$$-\omega^2 x + Gm_1 \frac{x + \mu_2 a}{r_1^3} + Gm_2 \frac{x - \mu_1 a}{r_2^3} = 0$$

となります。位置関係から $r_1 = x + \mu_2 a$, $r_2 = x - \mu_1 a$ が分かるので、 $x = \mu_1 a + r_2$, $r_1 = r_2 + a$ として x, r_1 を消去します。さらに $m_1 G = \mu_1 \omega^2 a^3$, $m_2 G = \mu_2 \omega^2 a^3$ を使うと

$$-(\mu_1 a + r_2) + \frac{a^3 \mu_1}{(r_2 + a)^2} + \frac{a^3 \mu_2}{r_2^2} = 0$$

が得られます。 a で割り、 $1 = \mu_1 + \mu_2$ を適当に割り込むと

$$-\mu_1 - u(\mu_1 + \mu_2) + \frac{\mu_1}{(1+u)^2} + \frac{\mu_2}{u^2} = 0$$

となります。これを μ_2/μ_1 について解けば次が得られます。

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{3u^3}{(1+u)^2} \frac{1+u+u^2/3}{1-u^3}. \quad (4)$$

6. 式 (4) の $u \rightarrow 0$ の極限を取ると、 $\mu_2/\mu_1 \simeq 3u^3$ です。よって $u \simeq \left[\frac{1}{3} \frac{\mu_1}{\mu_2} \right]^{1/3} = 1 \times 10^{-2}$ となり、 $r_2 = au = 1.5 \times 10^9 \text{m}$ となります。

第4問

1. 中性子が 180° の角度で散乱されたときが反跳エネルギー最大です。このとき、散乱前の中性子の運動エネルギー T 、散乱後の中性子、原子核の運動エネルギー T', E_{\max} とすると、エネルギー保存則と運動量保存則から

$$T = T' + E_{\max},$$

$$\sqrt{2mT} = -\sqrt{2mT'} + \sqrt{2mAE_{\max}}$$

が成り立ちます。核子の質量 m としました。これを解けば $E_{\max} = \frac{4A}{(A+1)^2}T$ となって、 $A=1$ で最大になることも分かります。

2. (a) 重心系での陽子の運動エネルギー (=中性子の運動エネルギー) を E^* と書くことにします。実験室系で中性子は $\sqrt{2T/m}$ の速度で進んでいたの、重心系ではその $1/2$ の速度を持ちます。ゆえに

$$\sqrt{\frac{2E^*}{m}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2T}{m}}, \quad \therefore E^* = \frac{1}{4}T.$$

重心系での座標を右のようにとることによって、重心系での陽子の運動量は

$$-\sqrt{2mE^*} \begin{pmatrix} \cos \theta^* \\ \sin \theta^* \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\sqrt{2mT} \begin{pmatrix} \cos \theta^* \\ \sin \theta^* \end{pmatrix}$$

とかけます。これを実験室系に戻すには x 方向に運動量 $\frac{1}{2}\sqrt{2mT}$ だけ進めばよいから、

$$p_L = \frac{1}{2}\sqrt{2mT} \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta^* \\ -\sin \theta^* \end{pmatrix}$$

が、実験室系での運動量となります。よって運動エネルギーは

$$E = \frac{p_L^2}{2m} = \frac{T}{2} (1 - \cos \theta^*). \quad (5)$$

2. (b) 式 (5) より、 $dE = \frac{T}{2} \sin \theta^* d\theta^*$ となります。したがって、エネルギーが $E \sim E + dE$ に入るような、各 θ^* の幅は

$$2 \times d\theta^* = 2 \times \frac{2dE}{T \sin \theta^*}$$

です。2倍したのは、各 E に対して $\pm \theta^*$ の二つが対応するので、それぞれの幅を加えたからです。重心系で散乱は等方的という仮定より、 θ^* 軸には確率密度 $1/2\pi$ が入ります。こうして、 $E \sim E + dE$ に入る確率は

$$\frac{dW}{dE} dE = \frac{4dE}{T \sin \theta^*} / 2\pi, \quad \therefore \frac{dW}{dE} = \frac{1}{\pi \sqrt{E(T-E)}}.$$

3. 入射した中性子は、シンチレータ中の陽子 (水素原子核) に衝突します。陽子は Coulomb 相互作用によってシンチレータ内の価電子たちを励起することで、衝突によってえたエネルギーをシンチレータに与えます。励起された価電子は脱励起し、エネルギーを光子として放出します。

発生した光子の一部は光電子増倍管に向かい、光陰極に衝突して電子を叩き出す。この電子が、電場による加速、極板との衝突を繰り返して増幅され、信号として取り出されます。

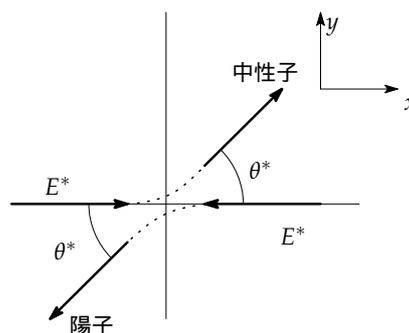
4. 平均自由行程 λ は、粒子が散乱されるまでに進める距離の目安を与えるものです。衝突断面積 σ とするとき、体積 $\sigma \lambda$ 辺りに散乱体が 1 つ程度あるべきなので $n\sigma\lambda = 1$ 、すなわち $\lambda = 1/n\sigma$ 。

5. 中性子が x だけ進むまでに陽子に散乱される確率を $P(x)$ とし、これを求めましょう。

中性子が dx だけ進んだとき、散乱される確率は dx/λ であることに注意すれば

$$P(x+dx) = (x \text{ までに散乱される確率}) + (x \text{ までに散乱されない確率}) \times (\text{幅 } dx \text{ で散乱される確率})$$

$$= P(x) + [1 - P(x)] \frac{dx}{\lambda}$$



この微分方程式を解けば $P(x) = 1 - e^{-x/\lambda}$ となります。

6. プラスチックシンチレータの密度 $10\text{g}/\text{cm}^3$ から $n = \frac{1}{13} \times 6 \times 10^{23}/\text{cm}^3$.

また、運動エネルギー 20MeV は、運動量 $\sqrt{2mc^2T}/c = \sqrt{2 \times 1000 \times 20}\text{MeV}/c = 200\text{MeV}/c$ なので、図より $\sigma = 0.5 \times 10^{-24}\text{cm}^2$.

したがって $\lambda = 1/n\sigma = \frac{130}{3}\text{cm}$. ゆえに検出効率は

$$P(x = 10\text{cm}) = 1 - e^{-3/13} = \frac{3}{13} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{13} \right)^2 + \dots = 20\%$$

第5問

1. すっきりした答えが出来ないので、思いっただけ書いておきます。

- 温度計の位置は試料に近い所を取る。(温度計温度 = 試料温度, とするため)
- 試料の不均一を抑えるために, なるべく小さな試料を使う。
- 試料付近は, 外界からの輻射や, 寒剤の対流を抑えるために, シールドをつける。

コメント1 以下の問題は, 超伝導体の熱力学的な取り扱いが題材になっています。熱力学に関しては, 理想気体, van der Waars 気体, 磁性体などに適用してきたことがあるかと思いますが, 超伝導体に対しても, 磁化 M もしくは磁束密度 $B = M + \mu_0 H$ に関する状態方程式, そして内部エネルギーを取り入れれば, たとえば自由エネルギー G と, その自然な変数 T, H によって同様に熱力学が組めます。

超伝導体の状態方程式は, Meissner 効果から出てきます。これはミクロに見れば「超伝導状態は抵抗ゼロで電流が流れるので, レンツ則が完全に働いて ($M = -\mu_0 H$) 磁場の進入を許さない ($B = 0$)」ということです。ただし超伝導体には臨界磁場 $H_c(T)$ なるものがあって, これより大きな磁場がかかると常伝導に転移します。

以上のミクロな事情から (H, T) の全域で B の状態方程式が得られ, 後は比熱 $C(T)$ を調達すれば内部エネルギーが決まって熱力学の話になるわけです。

コメント2 H, T で系の状態が指定されるわけなので, G_n, G_s という2つの自由エネルギーがあるのはおかしい, と個人的に思うので, 私見を述べてしまいます。コメントお待ちしております。

$H < H_c(T)$ での「常伝導相のエネルギー」 $G_n(H, T)$ は「仮に相転移が起こらない系(つまり, 測定された比熱転移を無視して外挿^{*3}し, (H, T) 全域で $B = \mu_0 H$ であるとした系) だった場合の自由エネルギー」であると考えます。当然, 相転移が起きる系と比較すると, 常伝導相の自由エネルギーは一致し, 超伝導領域では $G_s < G_n$ を満たすものになるはずですが..

2. 熱力学関係式 $dU = TdS = C(T)dT$ を積分すればよいです。

$$S(T) = \int_0^T \frac{C(T')}{T'} dT', \quad U(T) = U(0) + \int_0^T C(T') dT'$$

3. C/T 直線と縦軸との交点を $\alpha = 1.35 \text{ mJ/mol} \cdot \text{K}^2$ と読んで, $\frac{C}{T} = \alpha + \gamma T$ すなわち $C = \alpha T + \gamma T^3$ となります。 αT は電子比熱による線形項です。

4. 2次相転移なので, エントロピー $S = -\frac{dG}{dT}$ は連続。したがって

$$0 = S_s(T_c) - S_n(T_c) = \int_0^{T_c} \frac{C_s - C_n}{T} dT$$

これは C_s/T と C_n/T 曲線で挟まれる面積が等しく分割されていることを示しています。

^{*3} 外挿にはもちろん任意性があるって, それゆえ $S_n(T_c) = \int_0^{T_c} C(T')/T' dT'$ の値は決まりません。ただ2次相転移で繋がる事情を考慮して, 問題文の図3で面積を等しく取ります(問題5-4)。(・・・と僕が考えていますが議論中です。thanks 立本君)

5. 右の図は、 HT に関する相図です。

正常状態については、 $B = \mu_0 H$ ですので、path 1 での積分を実行して

$$G_n(T, H) = G_n(T, 0) - V \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \quad (T > T_c)$$

$T > T_c$ としましたが、コメントしたとおり、これを常伝導状態での (H, T) 全域での自由エネルギーと考えます。

一方、超伝導状態 $H < H_c(T)$ では $B = 0$ 、 $H > H_c(T)$ のとき $B = \mu_0 H$ になることに注意して、path 2 で積分をすると、

$$G_s(T, H) = G_s(T, 0)$$

$$G_n(T, H) = G_s(T, 0) - V \frac{1}{2} \mu_0 (H^2 - H_c(T)^2)$$

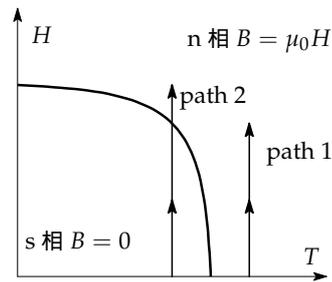


図1 超伝導体の相図
($T < T_c, H < H_c(T)$)

($T < T_c, H > H_c(T)$)

となります。 $G_n(T, H)$ に関して二つの表式が得られたので、これを等しいと置くと、

$$G_n(T, 0) = G_s(T, 0) + V \frac{1}{2} \mu_0 H_c(T)^2 \quad (6)$$

が得られます。

さて、path 2 に沿って H を徐々に大きくしていくとき、 $\frac{\partial G}{\partial H}$ の変化はどうなるかを考えると、

$$\frac{\partial G}{\partial H} = \begin{cases} 0 & H < H_c(T) \\ -V\mu_0 H & H > H_c(T) \end{cases}$$

となって、臨界磁場付近で不連続。こうして1次相転移であることがわかります。

6. $(T, H) = (0, H_c(0))$ で、 G_s と G_n の値は等しくなければならないので

$$0 = G_n(0, H_c(0)) - G_s(0, H_c(0)) = G_n(0, 0) - G_s(0, 0) - V \frac{1}{2} H_c(0)^2$$

であって、 $G_n(0, 0) - G_s(0, 0) = 0.42 \times 0.1 \cdot V[\text{cm}^3] \cdot \text{mJ}$ を代入して $\mu_0 H_c(0) = 1.0 \times 10^{-5} \text{T}$ 。

7. $T \sim 0$ での比熱の様子を実験結果から見ると、 $C_n \sim \gamma T$ 、 $C_s \sim 0$ と分かります。

ここで $C = -T \frac{\partial^2 G}{\partial T^2}$ 、 $S = -\frac{\partial G}{\partial T}$ により、

$$G_n(T, 0) = G_n(0, 0) - TS_n(0, 0) - \frac{1}{2} \gamma T^2,$$

$$G_s(T, 0) = G_s(0, 0) - TS_s(0, 0)$$

と T で展開することが出来ます。あえて書きましたが第3法則より $S(0, 0) = 0$ です。この式と、式(6)を使えば

$$H_c(T) = \sqrt{\left(\delta - \frac{1}{2} \gamma T^2\right) \left(\frac{2}{\mu_0 V}\right)} \simeq H_c(0) \left(1 - \frac{\gamma}{4\delta} T^2\right)$$

第6問

1. 水素原子の $(2s), (1s)$ 間のエネルギー差は $-13.6\text{eV} \left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) = 10.2\text{eV}$ となるので、電子に励起エネルギー分を持たせるために 10.2V 印加すべし。

2. 始状態 $|i\rangle$, 終状態 $|f\rangle$ とすると、遷移確率は $\langle f | \mathbf{r} | i \rangle$ の二乗に比例します。したがって $\langle \mathbf{r} | i \rangle$ と $\langle \mathbf{r} | f \rangle$ の座標反転に関するパリティが同じ場合、積分 $\int d\mathbf{r} \langle f | \mathbf{r} \rangle \mathbf{r} \langle \mathbf{r} | i \rangle$ はゼロになり、遷移は起こりません。

ゆえに、 $2S_{1/2} \rightarrow 1S_{1/2}$ の遷移は、双極子遷移の確率はゼロであり、 $2S_{1/2}$ の寿命は長いのです。ただ、双極子遷移は電磁場との相互作用の最低次項であって、その下には四重極子遷移が続きます。こちらによる遷移確率は消えないので遷移は起こっても良さそうです。

3. $\mathcal{H}_Z = \frac{\mu_B}{\hbar} (l_z + 2s_z) B$ によるエネルギーシフトを考えると、

$$\begin{aligned} \alpha(2S_{1/2}, m = 1/2) \rightarrow \Delta E_\alpha &= \frac{\mu_B}{\hbar} \left(0 + 2 \times \frac{1}{2} \right) B = \frac{\mu_B}{\hbar} B, \\ a(2P_{1/2}, m = 3/2) \rightarrow \Delta E_a &= \frac{\mu_B}{\hbar} \left(1 + 2 \times \frac{1}{2} \right) B = 2 \frac{\mu_B}{\hbar} B \end{aligned}$$

となるので、差を取れば $h\Delta\nu = \frac{\mu_B}{\hbar} B$ となります。

4. エネルギー差 $h\nu_1 + h\Delta\nu$ は、 B を増すと広がってゆき、照射中のエネルギー $11.5\text{GHz} \times h$ になると、共鳴が起こります。したがって

$$h\nu_1 + \frac{\mu_B}{\hbar} B = 11.5\text{GHz} \times h$$

となります。たぶん問題文では $\hbar = 1$ として $\mu_B/h = 14\text{GHz/T}$ と書いているので、 $\hbar = 1$ とし、共鳴曲線より $B = 0.12 \pm 0.01\text{T}$ として計算すれば

$$\nu_1 = 11.5\text{GHz} - 14 \frac{\text{GHz}}{\text{T}} \times (0.12 \pm 0.01)\text{T} = (9.8 \pm 0.1)\text{GHz}$$

5. 寿命から来る線幅は $\Delta E = \hbar/\tau$ より、 $\Delta B = \frac{\hbar}{\mu_B} \Delta E = \frac{\hbar^2}{\tau \mu_B} = \frac{1}{2\pi \times 1.6\text{ns} \times 14\text{GHz}} \text{T} = 0.0071\text{T}$

それ以外の線幅の原因には例えば、原子の熱振動によるドップラー効果があげられると思います。

6. 電荷が有限の領域に分布しているとするとしましょう。古典電磁気でやるように、電荷分布（球対称、中心 O とします）中に点電荷 C をおくと、半径 OC の球外の電荷は寄与できず、Coulomb 力が弱まります。

同様に大きさを持った電子と陽子が十分近づくと、電荷がお互いに入り込んで、Coulomb 力を弱めてしまい、エネルギーが上昇することになります。

電子が陽子付近によく分布する $2S_{1/2}$ の方が、 $2P_{1/2}$ よりも先の効果がつよいので、 $2S_{1/2}$ のエネルギーが上昇します。