平成２０年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

物　　理　　学

平成１９年８月２７日（月）　１３時００分～１７時００分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で６問ある。第１問、第２問、第３問は全員解答すること。さらに第４問、第５問、第６問の中から１問を選んで解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき１枚、合計４枚配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に科目名（物理学）、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名（物理学）、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配布する。

第1問

ハミルトニアンが

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{p_k^2}{m} + m\omega^2 x_k^2\right)$$

で与えられる2次元調和振動子の量子力学を考える。ここで x_k は座標で p_k はその正準運動量、m は質量、$\hbar = h/2\pi$ (h はプランク定数)、ω は角振動数である。正準交換関係は

$$[x_k, p_l] = i\hbar\delta_{kl}, \quad [x_k, x_l] = [p_k, p_l] = 0\,, \quad (k, l = 1, 2)$$

である。このとき以下の設問に答えよ。

1. 生成消滅演算子

$$a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}x_k - i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}p_k\right), \quad a_k = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}x_k + i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}p_k\right), \quad (k = 1, 2)$$

がみたす交換関係を、x_k, p_k の交換関係から導け。また、ハミルトニアン $\mathcal{H}$ を生成消滅演算子を用いて表せ。

2. 基底状態 $|0\rangle$ は、消滅演算子を用いた条件

$$a_k|0\rangle = 0\,, \qquad (k = 1, 2)$$

により定義される。この定義式を、座標 x_k を変数とする微分方程式に書き換え、対応する基底状態の波動関数 $\psi_0(r)$ を $r\,(= \sqrt{x_1^2 + x_2^2})$ の関数として求めよ。ただし、規格化因子を定める必要はない。

3. ハミルトニアン $\mathcal{H}$ の全ての固有状態を基底状態 $|0\rangle$ と生成演算子で書き表し、それらの固有値を求めよ。また、各固有値に対する縮退度を求めよ。

次に2次元の極座標 r, $\theta\,(= \tan^{-1}(x_2/x_1))$ を用いた解析を行う。以下の設問では簡単のため $\hbar = m = \omega = 1$ とおく。必要であれば、2次元のラプラシアンの極座標表示

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}$$

を用いてよい。

4. 波動関数を $\psi = R(r)\Theta(\theta)$ と変数分離し、シュレディンガー方程式に代入する。θ 方向の方程式を解くと、$R(r)$ に関する微分方程式は

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(2E - r^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0$$

となることを導け。ここで E はハミルトニアン $\mathcal{H}$ の固有値を表す。また、n は角度方向の量子数であるが、それがどのような値をとるべきか、理由とともに述べよ。

5. 設問 2 で求めた ψ_0 を用いて $R(r) = f(r)\psi_0(r)$ と書き換えると、$f(r)$ に対する微分方程式は

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}(1-2r^2)\frac{df}{dr} + \left(2E - 2 - \frac{n^2}{r^2}\right) f = 0$$

となる。$f(r)$ を

$$f(r) = r^\alpha \sum_{s=0}^{\infty} f_s r^s, \quad (f_0 = 1)$$

のようにべき級数展開するとき、$f(r)$ が原点 $r = 0$ で発散しないという条件を用いて実数パラメータ α を決定せよ。

6. 設問 5 のべき級数が有限個の項からなるという条件から固有値 E を求め、設問 3 で求めた固有値 (ただし $\hbar = m = \omega = 1$ とおいたもの) と一致することを示せ。

第2問

ある分子 N 個からなる系を考える。それぞれの分子は3つの状態をとる。そのうちの2つの状態のエネルギーは縮退しており、そのエネルギーの値を0とする。残りの1つの状態のエネルギーを ε とする。それぞれの分子は互いに独立とする。この系が温度 T の熱平衡状態にあると仮定して以下の設問に答えよ。

1. この系の内部エネルギーを求めよ。
2. この系のエントロピーを求めよ。また、 $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon < 0$ のそれぞれの場合について、$T = 0$ でのエントロピーを求め、それらの値が異なる理由を説明せよ。

エネルギーが ε の状態にある分子の数を N_ε とする。以下の設問で必要ならば、二項分布の公式

$$(x+y)^N = \sum_{m=0}^{N} {}_N C_m x^{N-m} y^m$$

を利用してもよい。

3. 熱平衡状態での N_ε の分布関数 $P(N_\varepsilon)$ を求めよ。
4. 熱平衡状態での N_ε の平均値 $\langle N_\varepsilon \rangle$ を求めよ。次に、ある温度 $T = T_1$ において、$\langle N_\varepsilon \rangle$ が ε によってどのように変化するかについて考える。特に、ε が $\pm\infty$ に近づく場合の振る舞いや $\varepsilon = 0$ 付近の様子に注意して、$\langle N_\varepsilon \rangle$ を ε の関数として概形を図示せよ。また、温度が $T = 2T_1$ の場合の $\langle N_\varepsilon \rangle$ の概形も合わせて図示せよ。
5. 熱平衡状態における N_ε の分散 $\langle N_\varepsilon^2 \rangle - \langle N_\varepsilon \rangle^2$ を求めよ。
6. $\langle N_\varepsilon \rangle$ の ε に対する応答関数
$$\chi = \frac{\partial \langle N_\varepsilon \rangle}{\partial \varepsilon}$$
を求めよ。また、χ を $\langle N_\varepsilon^2 \rangle - \langle N_\varepsilon \rangle^2$ を用いて表せ。

第３問

以下の設問を通して、自由空間と導波管 (金属でできた中空の管) における電磁波の伝搬の違いについて考えよう。

1. 電場を $\tilde{\mathbf{E}}$、磁場を $\tilde{\mathbf{B}}$ とすると、真空中のマクスウェル方程式は

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\tilde{\mathbf{E}} &= 0, \qquad \nabla\times\tilde{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\tilde{\mathbf{B}}}{\partial t}, \\ \nabla\cdot\tilde{\mathbf{B}} &= 0, \qquad \nabla\times\tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\tilde{\mathbf{E}}}{\partial t} \end{aligned}$$

と書ける。ここで c は真空中の光速度である。これらの式から、次の波動方程式を導け。

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}, \qquad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{0}.$$

以下では、z 方向に伝搬する電磁場の関数形を

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(x,y,z,t) &= \mathbf{E}(x,y)\exp\left[i(kz-\omega t)\right], \\ \tilde{\mathbf{B}}(x,y,z,t) &= \mathbf{B}(x,y)\exp\left[i(kz-\omega t)\right] \end{aligned}$$

と仮定する (自由空間中を z 方向に伝搬する電磁波では、電磁場の z 成分は共にゼロであるが、境界が存在する場合には、それらは必ずしもゼロではないことに注意せよ)。

2. このとき、k と ω で表されるある γ を用いると、$\mathbf{E}(x,y)$, $\mathbf{B}(x,y)$ の z 成分 E_z, B_z が

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2\right)E_z = 0, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2\right)B_z = 0 \tag{2}$$

という形の方程式を満たすことを示し、そのときの γ^2 を具体的に書き表せ。

次に、図１のような長方形 $(a > b)$ の断面を持つ導波管内を、z 方向に伝搬する電磁波を考える。導波管の壁面は完全導体でできており、内部は真空とする。ただし、壁面の厚さは無視してよいものとする。また、$\mathbf{n}$ を壁面の内側を向く単位法線ベクトルとしたとき、壁面での境界条件は $\mathbf{n}\times\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{n}\cdot\tilde{\mathbf{B}} = 0$ で与えられる。

3. 変数分離法を用いて、式 (1) を E_z について解くことを考える。導波管壁面の境界条件に注意すると、整数 m, n を用いて

$$\gamma^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

と書けることを示せ。また、この整数の組 (m, n) に対する解 E_z を求めよ。ただし、E_z の最大値を E とせよ。

4. 設問 3 と同じ整数の組 (m, n) を用いると、式 (2) の解は

$$B_z = B\cos\alpha x\cos\beta y$$

と書ける。ただし、

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta = \frac{n\pi}{b}$$

である。このとき、残りの成分 E_x, E_y, B_x, B_y を求めよ。

5. 設問 3 と 4 で得られた解 $\mathbf{E}(x, y)$, $\mathbf{B}(x, y)$ のうち、$E_z = 0$ を満たす特別な場合を考える。4 つの整数の組 (m, n)=(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1) に対応する電磁場の解のうち、z 方向に伝搬する電磁波を表し、かつ、その振動数が最小となるものはどれか。その最小振動数と (m, n) を答え、理由も述べよ。

6. 設問 5 で $E_z = 0$ の代わりに、$B_z = 0$ を満たす場合はどうなるか。同じく、最小振動数と (m, n) を、理由をつけて答えよ。

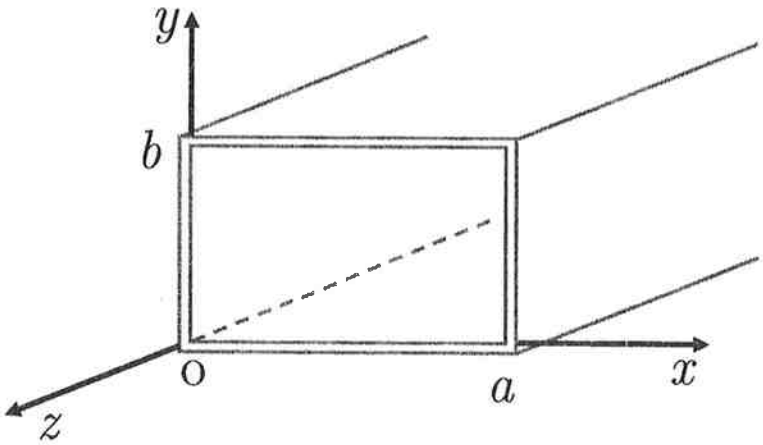

図 1: z 方向に無限に伸びている導波管の模式図。ただし、$z < 0$ の領域のみ描かれている。

第４問

コンプトン散乱を利用して、ガンマ線が飛んでくる方向を測定しよう。光速度を c とする。

1. 図１のように、エネルギー E_γ のガンマ線が静止している電子と衝突し、入射方向から角度 θ の方向に散乱した。散乱後のガンマ線のエネルギーを E'_γ、電子の運動量の大きさを p、散乱角を ϕ、電子の静止質量を m とする。相対論を考慮して、散乱前後でのエネルギー保存則と運動量保存則を表す式を書き下せ。

2. 散乱後のガンマ線のエネルギーは、

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1+\alpha(1-\cos\theta)} \tag{1}$$

と与えられることを示せ。ここで $\alpha = E_\gamma/mc^2$ である。

ガンマ線が飛んでくる方向 θ を決定するために、ガンマ線検出器 A，B を図２のように x 軸上に配置した。これらの検出器はともに NaI(Tl) 結晶と光電子増倍管から構成されている。

3. この結晶内の原子とガンマ線との相互作用に関して、コンプトン散乱の他に主要な過程が２つある。その２つは各々どのような過程か。あわせて 150 字以内で説明せよ。

ガンマ線が結晶内の原子と相互作用すると電子が散乱される。ここでは、散乱される前の電子は静止していたものとし、散乱された電子は、結晶内でその運動エネルギーの全てを失うとする。したがって、検出器で測定されるエネルギーは、この運動エネルギーであるとしてよい。図２のガンマ線源 S からは、E_γ の単色のエネルギーをもつガンマ線のみが放出される。E_γ の値は既知で、以下では $E_\gamma < 2mc^2$ とする。

まず、検出器 A だけでエネルギーの測定を行ったら、図３の度数分布となった。ただし、検出器のエネルギー分解能は十分高く、また結晶内での多重散乱は無視できるものとする。

4. 図３の広い分布 (I) と鋭いピーク (II) は、ガンマ線と原子との相互作用に関するどのような過程に対応するか、それぞれ答えよ。また、$E_{\max}$ を E_γ と α を用いて表せ。

次に、ガンマ線が検出器 A に入射し、結晶内で１回だけコンプトン散乱した後、検出器 B に入射する事象を考えよう。ここで、検出器 A，B で測定されたエネルギーを、それぞれ E_{A}，E_{B} とする。

5. この場合に得られた E_{A} と E_{B} の関係を太線や黒丸で示す図として最も適当なものを図４の（あ）～（か）から１つだけ選び、その理由を簡単に述べよ。ただし、結晶の大きさは十分小さいとしてよい。

6. 検出器 A のエネルギー分解能を考慮して、図２の角度 θ の決定精度を考える。まず、角度 θ を E_γ，E_{A}，α を用いて表せ。次に、検出器 A のエネルギー分解能を ΔE_{A} としたとき、角度 θ の分解能 $\Delta\theta$ を、ΔE_{A}，E_{A}，θ，α を用いて表せ。また、$E_\gamma = mc^2$，$\theta = 45$ 度、$\Delta E_{\mathrm{A}}/E_{\mathrm{A}} = 0.1$ のとき、$\Delta\theta$ は何度か。有効数字１桁で求めよ。

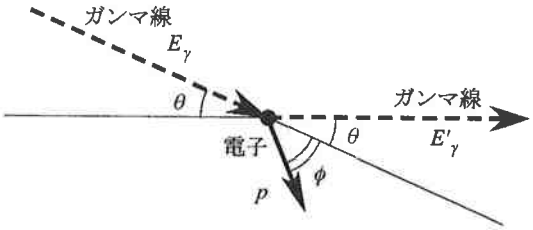
ガンマ線
E_γ
θ
ガンマ線
E'_γ
θ
電子
ϕ
p

図 1

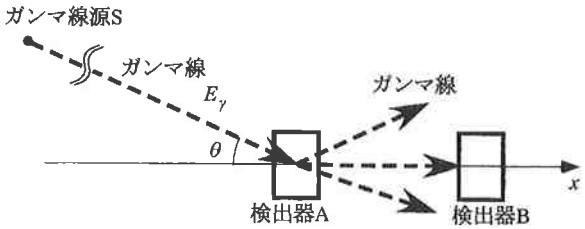
ガンマ線源S
ガンマ線
E_γ
θ
ガンマ線
x
検出器A
検出器B

図 2

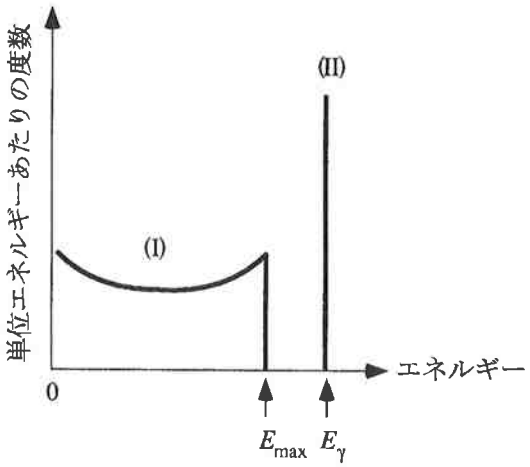
単位エネルギーあたりの度数
(II)
(I)
エネルギー
0
E_{max}
E_γ

図 3

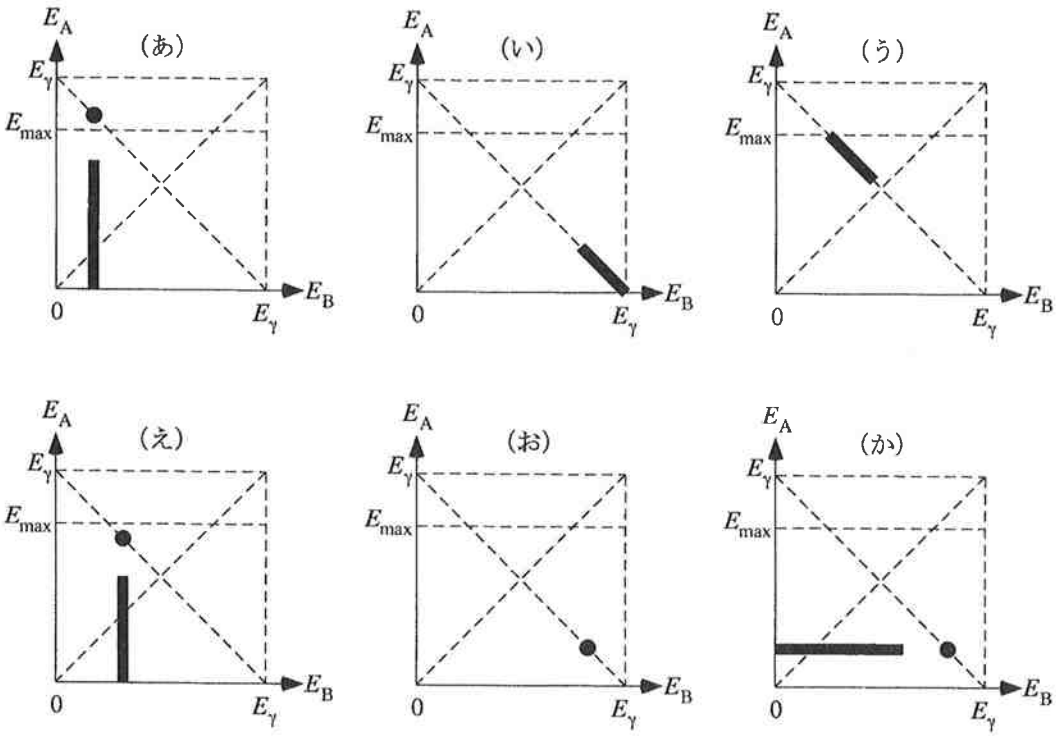
(あ)
(い)
(う)
(え)
(お)
(か)
E_A
E_B
E_γ
E_{max}
0

図 4

第５問

質量 m の分子からなる温度 T の理想気体を考える。その気体中の分子の速度 (v_x, v_y, v_z) は、以下のマクスウェル・ボルツマン分布に従っている。

$$f(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z = \left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}} T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m}{2k_{\mathrm{B}}T}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\right] dv_x dv_y dv_z. \qquad (1)$$

ここで、k_{B} はボルツマン定数である。

この速度分布を測定する実験の概略を図 1 に示す。真空中に、分子源、遮へい板、および直径 d の円筒状の回転ドラムが設置されている。それらには、それぞれ小孔 A、B、および H が空いている (これらはすべてこの紙面上にあるものとする)。分子源内は温度 T で分子数密度 n の単一種類の気体で満ちており、小孔 A から分子が常に一定量噴き出しているとする。ただし、噴き出すことによって温度や分子数密度は変化しないとする。このドラムは紙面に垂直な中心軸回りに角速度 ω で回転している。ここで、A と B を結ぶ方向を z 軸とし、z 軸とドラムの回転軸が交わる点を O とする。

図 1(a) のように、H が z 軸を通過した瞬間に、分子源から飛んできた分子がドラムの中に入る。ドラムが回転しているので、図 1(b) に示すように、H が z 軸からずれてしまうともはや分子は入れない。ドラムの内側にはフィルムが貼られており、小孔 H から入ってきた分子は、その速度の違いに応じてフィルム上の異なる位置に付着し、フィルムを黒化させる。したがって、フィルムの黒化度分布から分子の速度分布を測定することができる。

実験後、フィルムを取り出して黒化度分布 $I(s)$ を測定すると図 2 のようになった。ここで、フィルム上の原点 C を、H-O-C が一直線になる位置にとり、C から円周に沿って測ったフィルム上での距離を s とする。

以下の設問で、必要ならば下記の定積分を用いてよい。

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1. 気体の圧力は、多数の気体分子が壁と衝突してはねかえるときの力積から生じる。その衝突を完全弾性衝突と仮定し、式 (1) を利用して分子源内の気体の圧力を求めよ。計算過程も記述すること。

2. 式 (1) を用いて、分子源の内壁に単位時間、単位面積あたりに衝突する分子数を計算し、小孔 A から単位時間あたりに噴き出す分子数を求めよ。ここで小孔 A の面積を S_{A} とする。

3. z 軸方向に速さ v で飛んできた分子がフィルム上に到着する位置 s を求めよ。また、速さが $v + \Delta v$ の分子が到着する位置を $s + \Delta s$ としたとき、Δv と Δs との関係を求めよ。ただし、Δv は v に比べて十分小さいものとする。

4. 小孔 A から噴き出す分子のうちフィルムに到達するのは、図 1(a) に示すように z 軸まわりの微小立体角 $\Delta\Omega$ の範囲に噴き出した分子のみである。これを利用して、式 (1) を極座標表示することにより、ドラムに入る分子のうち、速さが v である分子数 $N(v)$ の v 依存性を求めよ。

5. フィルムの黒化度は付着した分子数に比例する。設問 3 と 4 の結果から、フィルムの黒化度分布 $I(s)$ を求めよ。ただし、$I(s)$ の絶対値は $\Delta\Omega$ や測定時間（露出時間）などに依存するので、$I(s)$ の s 依存性を表す関数形だけを答えればよい。

6. 上述の実験において、今度は分子源の中に分子量の異なる 2 種類の気体を入れた場合を考える。分子源の温度を一定値 T に保ったまま測定を行ったときに得られるフィルムの黒化度分布 $I(s)$ の概形を描け。ただし、2 種類の気体の混合比は問わないものとする。また、その結果から、2 種類の気体分子の分子量比を求めるにはどうしたらよいか簡単に述べよ。

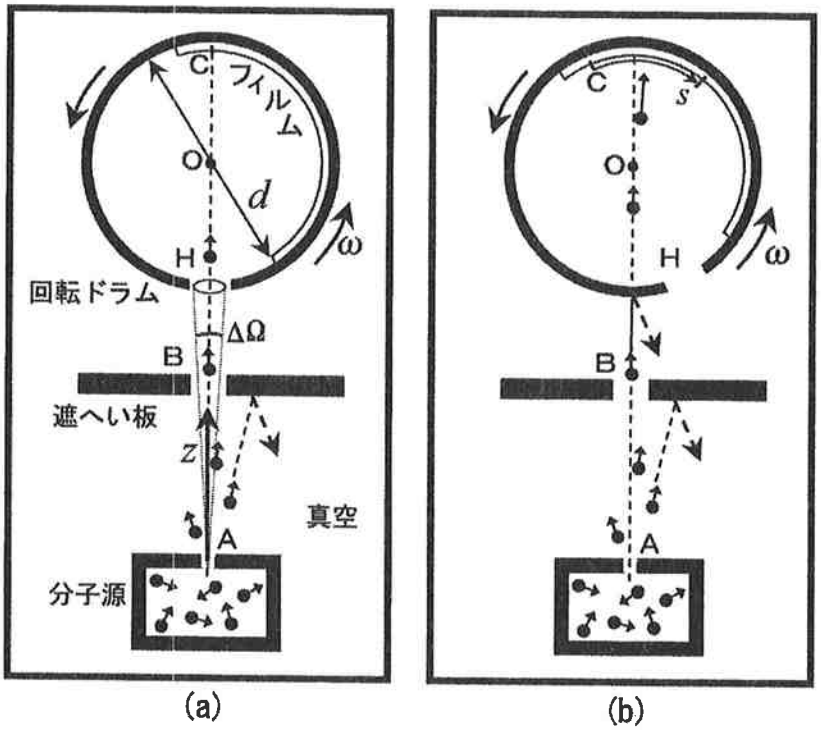

図 1: 分子の速度分布を測定する実験の概略図。

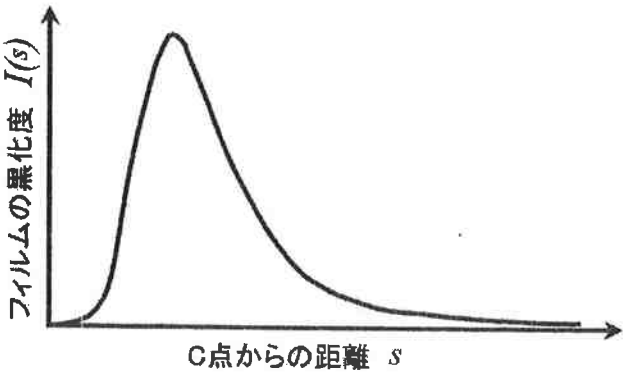

図 2: 実験結果。

第6問

基礎的な物理法則を用いて観測量を解釈することで、遠方にある天体の物理量（温度、半径、密度など）を推定できる。ここでは、黒体放射の性質と古典力学を用いて考察する。

まず、温度 T の天体からの黒体放射を考える。黒体放射の輝度スペクトル $I_T(\nu)$（単位面積、単位時間、単位立体角、単位振動数あたりのエネルギー）は、プランクの法則

$$I_T(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp(h\nu/k_{\mathrm{B}}T) - 1} \tag{1}$$

で与えられる。ここで、ν は電磁波の振動数、h はプランク定数、c は光速度、k_{B} はボルツマン定数である。

1. $h\nu/k_{\mathrm{B}}T \ll 1$ の極限において、$I_T(\nu)$ が ν, T のそれぞれ何乗に比例するか求めよ。

2. $I_T(\nu)$ は $\nu = \nu_{\mathrm{peak}}(T)$ にピークを持つ。$\nu_{\mathrm{peak}}(T)$ が T に比例することを示せ。また、$\nu_{\mathrm{peak}}(T) = a \times k_{\mathrm{B}}T/h$ と置くとき、定数 a が以下の式を満たすことを示せ。

$$\frac{1}{3}a = 1 - \exp(-a). \tag{2}$$

3. 設問 1, 2 の結果を用いて、$I_T(\nu)$ の概形を、$T = 10^4$ [K] と 10^7 [K] の 2 つの場合について描け。ν を横軸、$I_T(\nu)/I_0$ を縦軸とする両対数表示を用いること。ここで、I_0 は、$T = 10^4$ [K] の輝度スペクトルのピーク値とする。式 (2) の近似解を $a = 3$, $k_{\mathrm{B}}/h = 2 \times 10^{10}$ [Hz K^{-1}] として、ν_{peak} の値をそれぞれ有効数字 1 桁で求め、図中に記せ。また、これらピーク付近の電磁波は、一般に何と呼ばれるか、以下の 6 つからそれぞれ 1 つずつ選べ。

電波、赤外線、可視光、紫外線、X 線、ガンマ線

4. 温度 T の黒体の表面から、単位面積、単位時間あたりに放射されるエネルギー総量を $F(T)$ とする。式 (1) を用いて、$F(T)$ が T の 4 乗に比例することを示せ。

次に、高速で自転する天体の力学的な安定性を考える。

5. 一様な質量密度 ρ をもち半径が R の球形の天体が、周期 P で自転しているとする。この天体において最も遠心力の強い場所を考え、そこにおかれた質点 (質量 m) に働く重力と遠心力を求めよ。この天体が安定に存在するためには、いかなる場所でも遠心力が重力を上回らないことが必要であるという条件から、天体の密度 ρ の下限値を示せ。なお、重力定数は G とする。

設問 4, 5 の結果を用い、次のような高密度天体を例にとって、半径と密度および質量の下限値を推定する。計算結果は有効数字 1 桁で記せ。

6. 地球から距離 1.5×10^{19} [m] の距離にある天体を観測した。この天体の放射の輝度スペクトルは、温度 $T = 10^7$ [K] の黒体放射であり、地球の位置で観測される単位時間、単位面積あたりのエネルギー総量は、$f = 3 \times 10^{-10}$ [W m^{-2}] である（大気の吸収等は無視する）。この天体を球形だと仮定したとき、その半径 R を求めよ。ただし、太陽に関する以下の数値を用いてよい。

   太陽は地球から 1.5×10^{11} [m] の距離にあり、その半径は 7×10^8 [m] である。太陽からの放射は温度 6000 [K] の黒体放射であり、地球の位置で観測される単位時間、単位面積あたりのエネルギー総量は $f_{\mathrm{sun}} = 1.4 \times 10^3$ [W m^{-2}] である。

7. 設問 6 の天体が、周期 $P = 1 \times 10^{-3}$ [sec] で自転している。この天体の密度 ρ の下限値を求め、水および原子核の典型的密度と、それぞれ何桁異なるか述べよ。重力定数の値として $G = 7 \times 10^{-11}$ [N m^2 kg^{-2}] を用いてよい。また、この天体の質量の下限値を、太陽質量 $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ [kg] との比で示せ。

物理前半

[第 1 問]

1.$[a_k^\dagger, a_l^\dagger] = [a_k, a_l] = 0, [a_k, a_l^\dagger] = \delta_{kl} \quad (k, l = 1, 2), \quad \mathcal{H} = \sum_{k=1}^{2} \hbar\omega(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2})$.

2.$p_k \to (\hbar/i)(\partial/\partial x_k)$ に換えた以下が微分方程式。

$$(x_k + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x_k})\psi(x) = 0 \tag{19}$$

解は $exp(-(m\omega/2\hbar)r^2)$。（変数分離法から、各座標成分 x_k ごとに $exp(-(m\omega/2\hbar)x_k^2)$ が解になるので。）

3. 固有状態は $(1/\sqrt{n!m!})(a_1^\dagger)^{n_1}(a_2^\dagger)^{n_2}|0\rangle, \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2\ldots$。規格化は $\|(a^\dagger)^n|0\rangle\|^2 = \langle 0|a^n(a^\dagger)^n|0\rangle = \langle 0|a^{n-1}(a(a^\dagger)^n)|0\rangle = \langle 0|a^{n-1}(a^\dagger)^{n-1}|0\rangle \times n = \|(a^\dagger)^{n-1}|0\rangle\|^2 \times n$ のように帰納的にわかります。[*4]

固有値を出すために、1 番で求めた $\mathcal{H}$ をこれに作用させます。脚注 4 の式を使って $\hbar\omega(n_1 + n_2 + 1)$。縮退度は $n = n_1 + n_2$ に対して $n + 1$。

4. 気合です。n は、波動関数の一価性のために $\Theta(\theta)$ は周期 2π の関数でなくてはいけないので、整数でなくてはいけません。（ちゃんと $\Theta(\theta) = exp(in\theta)$ となることも式で示しましょう。）

5. 条件より $\alpha \geq 0$。$r \to 0$ で $f(r) \sim r^\alpha$。微分方程式は $f'' + (1/r)f' - (n^2/r^2)f \sim 0$。代入して $\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2 = 0$。解いて $\alpha = n$。

6. べき級数を代入して気合で整理します。すると $f_1(2n+1)r^{n-1} + \sum_{s=0}^{\infty}[f_{s+2}\{(n+s+2)(n+s) - n^2\} + 2f_s\{E - (1+n+s)\}]r^{n+s} = 0$ となります。（多分。違うかもしれません。）すると各 r^{n+s} の係数は 0 になるはずですが、ある s' 以上で $f_{s'} = 0$ となるので、その境目あたりで $E = 1 + n + s$ となるはずです。[*5]n, s ともに 0 以上の整数より設問 3 と一致。[*6]

---

*4 途中、$a(a^\dagger)^n = n(a^\dagger)^{n-1} + (a^\dagger)^n a$ を使いました。証明は以下。まず左辺を b_n とおくと $b_n = (aa^\dagger)(a^\dagger)^{n-1} = (1 + a^\dagger a)(a^\dagger)^{n-1} = (a^\dagger)^{n-1} + a^\dagger b_{n-1}$ と帰納法。特に $a(a^\dagger)^n|0\rangle = n(a^\dagger)^{n-1}|0\rangle$。なお、本質的には a を交換関係使って右に動かしていくときに、1 つ動かすにつき $+1$ の因子が出るというだけなので、わざわざこう式の形で示さなくても、言葉で説明すれば十分でしょう。

*5 もう少し議論を精緻化すると、全ての f_s が 0 でなく、かつべき級数が有限の項からなるのならば、$f_s = 0(s \geq s'), f_s \neq 0(s = s' - 1)$ なる s' が存在するはずで、そのとき $r^{n+s'-1}$ の係数に着目すれば。

*6 さらに、角度方向の量子数が、動径方向の量子数以下であることもわかります。

[第 2 問]

1.$Z = (2 + exp(-\beta\epsilon))^N$ より、以下のように求まります。

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}(\ln Z) = -N\frac{-\epsilon e^{-\beta\epsilon}}{2+e^{-\beta\epsilon}} = \frac{N\epsilon e^{-\beta\epsilon}}{2+e^{-\beta\epsilon}} \tag{20}$$

2.

$$S = \frac{E-F}{T} = k_B\beta(E + \frac{1}{\beta}\ln Z) = Nk_B\left(\ln(2+e^{-\beta\epsilon}) + \frac{\beta\epsilon e^{-\beta\epsilon}}{2+e^{-\beta\epsilon}}\right) \tag{21}$$

ここで $\beta = \infty(T=0)$ とすると

$$S(T=0) = Nk_B\begin{cases}\ln 2 & \epsilon > 0\\ \ln 3 & \epsilon = 0\\ 0(=\ln 1) & \epsilon < 0\end{cases} \tag{22}$$

と求まります。説明は、それぞれ上から、各分子の最低のエネルギーが $2, 3, 1$ 重縮退をしていること、$S = k_B \ln W$ という表現、絶対零度で系は基底状態を取ることに触れればいいでしょう。

以下、$p = exp(-\beta\epsilon)/(2 + exp(-\beta\epsilon))$ とおきます。いまの系は、各分子のエネルギーが確率 p で ϵ、$1-p$ で 0 にあるものと考えられます。

3.$P(N_\epsilon) = {}_NC_{N_\epsilon}p^{N_\epsilon}(1-p)^{N-N_\epsilon}$ 二項分布そのまま。

4. 以下の変形がわからなかったら、${}_nC_m = n!/((n-m)!m!)$ を思い出してください。

$$\langle N_\epsilon\rangle = \sum_{n=0}^{N} {}_NC_m p^m(1-p)^{N-m}m = Np\sum_{n=1}^{N} {}_{N-1}C_{m-1}p^{m-1}(1-p)^{(N-1)-(m-1)} = Np(p+(1-p))^{N-1} = Np \tag{23}$$

なお設問で与えられた公式を使いました。ここに p の定義式を代入してグラフを描くのは略します。$T=0$ だと $\langle N_\epsilon\rangle = N(\epsilon<0),\ N/3(\epsilon=0),\ 0(\epsilon>0)$ に注意して、有限温度ならそれを緩めれば OK です。$\epsilon \sim 0$ で一次関数的に振る舞い（テイラー展開より）、$\epsilon \to \pm\infty$ では $T=0$ での値に exponential に近づきます。[*7]温度が 2 倍になれば、(p は $\beta\epsilon$ の関数なので）グラフは横に 2 倍に伸びるだけです。

5.

$$\langle N_\epsilon^2 - N_\epsilon\rangle = \sum_{n=0}^{N} {}_NC_m p^m(1-p)^{N-m}m(m-1) = N(N-1)p^2 \text{（示し方は上と全く同じ）} \tag{24}$$

$$\langle N_\epsilon^2\rangle - \langle N_\epsilon\rangle^2 = Np(1-p) \text{（式 (23) も使って）} \tag{25}$$

例えば $p = 0, 1$ で分散 0 は見ればわかりますね。

6. 単に微分して $\chi = -\beta(\langle N_\epsilon^2\rangle - \langle N_\epsilon\rangle^2)$。ちゃんと ϵ とかで表すのは省略します。

[*7] これは、エネルギーギャップ大きい=飛び移りにくい=極限では $T=0$ と同じ状況に、ということ。さらに飛び移りにくさがエネルギーに対して exponential になるのはカノニカル分布から。

[第 3 問]

1. マクスウェル方程式は以下の通り。

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0 \tag{26}$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} \tag{27}$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0 \tag{28}$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t} \tag{29}$$

$(\partial/\partial t)$（式 29）$-\nabla\times$（式 27）で $\tilde{\mathbf{E}}$ の式。ここで $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ を使いました。

2. これは波動方程式に代入するだけ。$\gamma^2 = (\omega/c)^2 - k^2$.

問題とは少しズレますが、せっかくだしマクスウェル方程式全部に、いまの電磁場の関数系を代入してそのまんま計算すると、以下の方程式系を得ます。（実際に計算すればわかりますが、これ以上の式は出てこないので、これらは（今の関数系に対する仮定の下で）マクスウェル方程式全体と等価になります。）[*8]

$$\gamma^2 E_x = i(\omega \frac{\partial B_z}{\partial y} + k\frac{\partial E_z}{\partial x}) \tag{30}$$

$$\gamma^2 E_y = i(-\omega \frac{\partial B_z}{\partial x} + k\frac{\partial E_z}{\partial y}) \tag{31}$$

$$\gamma^2 B_x = i(-\frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} + k\frac{\partial B_z}{\partial x}) \tag{32}$$

$$\gamma^2 B_y = i(\frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} + k\frac{\partial B_z}{\partial y}) \tag{33}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2\right) E_z = 0 \tag{34}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2\right) B_z = 0 \tag{35}$$

さて、これを見ると下の二つの方程式を解いて E_z, B_z を求めてしまえば、残りは全部わかるようです。境界条件も、上の式を使えば全て E_z, B_z に対するものとして表すことができます。（例えば E_x に対する境界条件があれば、1 番目の式を使って。）これ以降、E_z, B_z に絞って解析を進めているのは、そのためです。

3.$E_z(x, y) = f(x)g(y)$ とおいて代入すると、$(f''/f) + (g''/g) + \gamma^2 = 0$ より、f, g ともに三角関数で表されることがわかります。[*9]境界条件 $E_z = 0$（「導体表面に平行な $\mathbf{E}$ 成分は 0」）より、$E_z =$

[*8] 方針としては、まず rot の第 1,2 成分の計 4 式から E_x, E_y, B_x, B_y を E_z, B_z のみで表し、その後はそれら 4 式を残り全てに代入。なお $\gamma = 0$ でもこれらの式は成り立ちますが、そのときは等価にはなりません。これは必要になったら考えます。（その場合でも、これらの式が成り立つのなら、これからの議論に支障はないので。）

[*9] 細かいこと言うと、これだけだと指数関数や一次関数になる可能性もあります。が、そのときは E_z の境界条件を満たすことができません。（指数関数については、$f = ae^{\alpha x} + be^{-\alpha x}$ とでもおいてみてください。$x = 0$ で $f = 0$ だと $f \propto \sinh$ より単調関数なので $x = a$ では $f \neq 0$ でアウト。定数関数でない一次関数については、明らかですね。）磁場も同様。なお定数関数な可能性は含めて「三角関数」と書いてあります。（後の設問でも $n = 0$ とか考えてるし。）

$E\sin[(m\pi/a)x]\sin[(n\pi/b)y]$ となって、答えを得ます。[*10]

4. 設問にはなっていませんが、B_z を cos で書ける理由にも触れておきます。いま磁場については「導体表面に垂直な $\mathbf{B}$ 成分は 0」が成り立ちます。これは $\partial B_z/\partial n = 0$ と表すことができます。（n は法線方向の微分。）それは、例えば $x = 0$ 平面上では $B_x = 0$ ですが、式 (32) 右辺の第一項は $E_z = 0$ on $x = 0$ という境界条件より 0（y で微分していますが、境界条件より $x = 0$ の平面上で y 方向にどう動かしたところでずっと 0 です。）で、結局第二項の $\partial B_z/\partial x$ のみ残るからです。よってそれを満たす関数ということで cos になります。

さらに、設問 3 と同じ整数の組 (m, n) を使えるのは、設問 3 で γ^2 を (m, n) で表しましたが、B_z についても同じことが出来るからです。共通の γ^2 を $a \neq b$ のときに、このように同じ形で書くためには、(m, n) も共通でなくてはいけません。[*11]

設問自体は、式 (30) から (33) に E_z, B_z の関数系を代入するだけなのですぐです。

$$\gamma^2 E_x = i(-\omega\beta B + k\alpha E)\cos\alpha x \sin\beta y \tag{36}$$

$$\gamma^2 E_y = i(\omega\alpha B + k\beta E)\sin\alpha x \cos\beta y \tag{37}$$

$$\gamma^2 B_x = i(-\frac{\omega}{c^2}\beta E - k\alpha B)\sin\alpha x \cos\beta y \tag{38}$$

$$\gamma^2 B_y = i(\frac{\omega}{c^2}\alpha E - k\beta B)\cos\alpha x \sin\beta y \tag{39}$$

この両辺を $\gamma^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$ で割ったものが答えです。

（以下の補足は、おそらく院試の答案には不要なんじゃないかと思います。それか、もっと簡単な論理で言えるのかもしれませんが。。いずれにせよ、調べたわけでもないし自信はかなりありません。）ところでもし $n = m = 0$ だとその操作は許されません（$\gamma^2 = 0$ より）が、そのときは上の式の両辺が 0 なので、そもそも上の式がただの trivial な等式になってしまいます。脚注 8 で触れたようにこのとき式 (30) から (35) はマクスウェル方程式に等価ではなく、いま $n = m = 0$ より $E_z = 0, B_z = B$ に留意して（式 (30) から (35) が成り立つことには変わりないので、今までの議論を捨てる必要はありません。）、この場合は

$$E_y = -cB_x \tag{40}$$

$$E_x = cB_y \tag{41}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \tag{42}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B \tag{43}$$

が等価な条件式として出てきます。（マクスウェル方程式を $E_z = 0, B_z = B$ として単純に計算すれば出てきます。$\gamma^2 = 0$ より $\omega = ck$ ともしました。）また脚注 10 で触れたように、ここにはさらに E_x, E_y に関する境界条件を課す必要があります。**以下、さらに自信がないので注意してください。**下の 2 つの式からすぐに、

[*10] 平行成分は他にもありますが、そちらの境界条件は（$\gamma \neq 0$ であれば）自動的に満たされます。設問 4 での B_z に対する境界条件を使うと、例えば式 (30) の右辺は $y = 0$ において常に 0 になります。

[*11] 証明。$(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 = (m'\pi/a)^2 + (n'\pi/b)^2$ とする。変形して $b^2(m - m')(m + m') = a^2(n' - n)(n' + n)$。もしも b^2 と a^2 の比が有理数比でなければ、これで証明終わり。（m, n の符合については、cos の対称性に吸収させれば OK。）ちょうどぴったり都合のいい有理数比（のモデル）だと。。どうなるんでしょう？

$(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)E_x = 0$ がわかります。これを設問と同じように変数分離法で解く（ただし、$E_x = 0$ in $y = 0, b$）と、$E_x = E_1(c_1 exp((n'\pi/b)x) + c_2 exp(-(n'\pi/b)x)) \sin((n'\pi/b)y)$ という形がわかります。全く同じように E_y も（こちらは x 成分が sin で）求まるのですが、これを元々の式 (42),(43) に入れるとできる恒等式は、明らかに係数が全部 0 でないと恒等式でなくなるので、$E_x = E_y = B = 0$。また、式 (40),(41) から $B_x = B_y = 0$ になるので結局全部消えます。よって伝播する電磁場の解にはなりません。

5. 上の考察から、$n = m = 0$ は弾いていいでしょう。残りの (n, m) ならどれも $E_z = 0$ をもちろん満たし、かつ他の成分（の一部）はちゃんと（例えばポインティングベクトルがノンゼロなようには）生き残るので伝播する電磁場の解と認められます。よって $(m, n) = (1, 0)$ がよく（理由は後述）、そのとき $\gamma^2 = (\pi/a)^2 = (\omega/c)^2 - k^2$ を解いて $\omega = c\sqrt{k^2 + (\pi/a)^2}$。$(0, 1)$ を選ばなかったのは、$a > b$ だから。（この解の形を見ればわかりますよね。）（振動数とあるので、角振動数を 2π で割ったほうがいいのかも？）

6.$B_z = 0$ なら $B = 0$ でなくてはいけません。これで $E = 0$ だと電磁場が全て 0 になってしまうので $E \neq 0$。[*12]さらに設問 4 で得た式をちゃんとチェックすると、m, n の少なくとも一方が 0 のときも、電磁場の成分が全て 0 になってしまいます。[*13]よって $(m, n) = (1, 1)$。（このときは大丈夫。）このとき $\gamma^2 = (\pi/a)^2 + (\pi/b)^2 = (\omega/c)^2 - k^2$ を解いて $\omega = c\sqrt{k^2 + (\pi/a)^2 + (\pi/b)^2}$。（$2\pi$ で割るうんぬんは、設問 5 と同じ。）

[*12] 混乱を招くかもしれないので念のため断っておきますが、E や B は（本文中の定義から）あくまで E_z, B_z の係数であって、例えば $B = 0$ になったからといって磁場がなくなるわけじゃありません。ただ設問 4 で E, B を使って電磁場の各成分を表した式 (36)-(39) からわかるように、$E = B = 0$ だと電磁場の全成分が 0 になります。

[*13] 後で見返したらわかりにくかったので、補足します。例えば式 (36) で $B = 0$ とします。もし $m = 0$ なら係数の $\alpha = 0$ なのでゼロ、$n = 0$ なら $\beta = 0$ よりサインのせいでゼロ。あるいはもっと簡単に考えれば、m, n のどちらか一方がゼロなら $E_z = 0$ なので $E = 0$ を考えているのと同じになるから、でもいいでしょう。なお、5 番の問題のときはこの問題は起こりません。（チェックしてみてください。）

平成２０年度物理　後半解答

中村 史一

平成 20 年 8 月 21 日

後半の選択問題を解いてみた感想ですが，どれを選択するかで解くのにかかる時間が多少変わってきます．得意不得意の他に戦略的に問題を選択するのも必要かと．満点をねらえってガッツリ稼ぎたい人は最後の方の小問の難易度で選ぶ，ある程度見切りを付けて他の問題にかけたい人は前半の小問ですぐ解けそうなものを選ぶとかがいいかなって思いました．問題の解答を作るにあたり、第５問は長谷川研の院生の小森田さん、東野さんに御世話になりました．ありがとうございました．

1　第４問

1. 散乱前，散乱後のガンマ線の運動量をそれぞれ p_γ，p'_γ とおくと質量は０より $E_\gamma = p_\gamma c$，$E'_\gamma = p'_\gamma c$ が成り立つ．また電子のエネルギーを E_e とおくと $E_e^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ となる．よってエネルギー保存，運動量保存より

$$E_\gamma + mc^2 = E'_\gamma + E \tag{1}$$

$$p_\gamma = p'_\gamma \cos\theta + p\cos\phi \tag{2}$$

$$0 = p'_\gamma \sin\theta + p\sin\phi \tag{3}$$

となる．よって与えられた文字に直すと

$$E_\gamma + mc^2 = E'_\gamma + \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \tag{4}$$

$$\frac{E_\gamma}{c} = \frac{E'_\gamma}{c}\cos\theta + p\cos\phi \tag{5}$$

$$0 = \frac{E'_\gamma}{c}\sin\theta + p\sin\phi \tag{6}$$

となる．

2. 前節の式を整理する．

$$p^2\cos^2\phi + p^2\sin^2\phi = p^2 \tag{7}$$

だから式 (5)，(6) を用いて整理すると

$$E_\gamma^{'2} + E_\gamma^2 - 2E_\gamma E'_\gamma \cos\theta = p^2c^2 \tag{8}$$

よって式 (4) の E'_γ を移項して２乗し、さらに前式を代入して整理すると $\alpha = \frac{E_\gamma}{mc^2}$ とおいて

$$E'_\gamma \quad = \frac{E_\gamma}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \tag{9}$$

が成り立つ．

3. ガンマ線の全エネルギーを電子に与え，エネルギーをもらった電子が原子から飛び出す光電効果がある．その確率は物質の原子番号の５乗に比例する．もう一つ電子・陽電子対を生成する電子対生成の過程がある．この反応で電子と陽電子のエネルギーの和は $(E_\gamma - 2m_e c^2)$ となり，反応が起こる確率も $(E_\gamma - 2m_e c^2)$ にほぼ比例する．

4. 広い分布 (I) はコンプトン散乱，鋭いピーク (II) は光電効果に対応している．検出器に与えるエネルギーは $E_\gamma - E'_\gamma$ と表すことが出来るから、

$$E_A = E_\gamma - E'_\gamma \tag{10}$$

よって θ =180 °のときに E_A は最大になるから，

$$E_{max} = E_\gamma(1 - \frac{1}{1+2\alpha}) = \frac{2\alpha}{1+2\alpha}E_\gamma \tag{11}$$

となる．

5. 検出器 B で検出される可能性があるのは検出器 A でコンプトン散乱を起こした場合のみである．ここで問題の仮定より検出器の結晶は十分小さいとみなすことが出来るから，検出器 B に到達する可能性があるのは式 (9) において $\theta + \delta\theta$ で表される E'_γ であるが，$\delta\theta$ は十分小さいと考えられる．線源から放射されるのは単色 X 線だから，すなわち検出器 B に到達するためには検出器 A において検出されるエネルギーが一定であると考えられる．さらにその後，検出器 B ではコンプトン散乱か光電効果を起こすと考えられるので，答えは (か) である．[1]

6.

$$E_A = E_\gamma - E'_\gamma \tag{12}$$

より，

$$E_\gamma - E_A = \frac{E_\gamma}{1+\alpha(1-\cos\theta)} \tag{13}$$

これを θ について解くと

$$\theta = \cos^{-1}(\frac{E_A}{\alpha(E_\gamma - E_A)} - 1) \tag{14}$$

となる．よって

$$\Delta\theta = \mid \frac{\partial\theta}{\partial E_A} \mid \Delta E_A \tag{15}$$

ここで，$y = \cos^{-1} x$ について

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sin y} \tag{16}$$

は成り立つことを利用すると，

$$\Delta\theta = \mid -\frac{1}{\sin\theta} \times \frac{\partial}{\partial E_A}(\frac{1}{\alpha(\frac{E_\gamma}{E_A} - 1)}) \mid \tag{17}$$

となる．よってこれを計算すると

$$\Delta\theta = \frac{E_\gamma \Delta E_a}{\alpha(\sin\theta)E_A^2(\frac{E_\gamma}{E_A} - 1)^2} \tag{18}$$

ここで与えられた数値を代入すると，$\alpha = 1$ より

$$E_A = E_\gamma - E'_\gamma = mc^2(1 - \frac{1}{2-\cos\theta}) = mc^2\frac{1-\cos\theta}{2-\cos\theta} \tag{19}$$

よって計算すると

$$\Delta\theta = \sqrt{2}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})(2 - \frac{\sqrt{2}}{2})\frac{\Delta E_A}{E_A} = 0.0536[rad] \tag{20}$$

よって度数に変換すると $\Delta\theta \sim 3$ °である．

[1] 光電効果を起こす場合は検出器 A と B で吸収されるエネルギーの合計が E_γ になると考えられるので，図 (か) の点の部分に相当する．

2 第5問

$$\int_0^\infty \exp\left(-\alpha x^2\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}}, \quad \int_0^\infty x\exp\left(-\alpha x^2\right) dx = \frac{1}{2\alpha}, \quad \int_0^\infty x^2\exp\left(-\alpha x^2\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\alpha^{-\frac{3}{2}} \tag{21}$$

1. 微小面積 dS の法線方向を z 軸にとる.z 方向の速度が v_z の気体分子が壁に衝突し, 完全弾性衝突した時に壁が受け取る力積は $2mv_z$ である.dt の時間の間に,dS に衝突するのは, 底面が dS で高さが $v_z dt$ の立体の内部にあるものだから,dt の間に壁が受け取る力積は

$$\begin{aligned} Fdt &= \int_{v_z \geqq 0} dv_x dv_y dv_z 2mv_z f(v_x, v_y, v_z) dS v_z dtn \\ &= 2mndSdt\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty dv_z v_z^2 \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2k_B T}\right) \\ &= 2mndSdt\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{2k_B T}{m}\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= nk_B TdSdt \end{aligned} \tag{22}$$

故に気体の圧力は,$p = nk_B T$

2. 小孔 A から吹き出す分子数 N は,

$$\begin{aligned} N &= \int_{v_z \geqq 0} dv_x dv_y dv_z f(v_x, v_y, v_z) S_A v_z dtn \\ &= nS_A dt\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty dv_z v_z \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2k_B T}\right) \\ &= nS_A dt\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k_B T}{m}\right) \\ &= n\left(\frac{k_B T}{2\pi m}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{23}$$

3. 速度 v の気体分子が H からドラムに入射してから, フィルムに到達するまでの時間 τ は,

$$\tau = \frac{d}{v} \tag{24}$$

であるから,

$$s = \frac{d}{2}\omega\tau = \underline{\frac{\omega d^2}{2v}} \tag{25}$$

となる.

$$\frac{ds}{dv} = -\frac{\omega d^2}{2v^2} = -\frac{s}{v} \tag{26}$$

であるから,

$$\frac{\Delta s}{s} = -\frac{\Delta v}{v} \tag{27}$$

4. テキストの (28) 式を極座標で表示すると

$$f(v)v^2 dvd\theta d\phi = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{mv^2}{2k_B T}\right] v^2 dvd\theta d\phi \tag{28}$$

となる. ドラムに入る分子のうち, 速さが v である分子の数は, 小孔 A に入る分子のうち, 速さが v で速度ベクトルの向きが $\Delta\Omega$ 方向を向いた分子の数に等しいので,

$$N(v) = \int_{\Delta\Omega} d(\cos\theta)d\phi v^2 f(v) v_z S_A n \tag{29}$$

となる.$v_z \approx v$ と近似すると,

$$\begin{aligned} N(v) &= v^3 f(v) S_A n \Delta\Omega \\ &= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} v^3 \exp\left[-\frac{mv^2}{2k_B T}\right] S_A n \Delta\Omega \\ &\propto v^3 \exp\left[-\frac{mv^2}{2k_B T}\right] \end{aligned} \tag{30}$$

5. 位置 s の近傍の微小幅 Δs に到達した気体分子の数 $I(s)\Delta s$ は, 速度 $v \sim v + \Delta v$ の速度を持ってドラムに入射した気体分子の数 $N(v)\Delta v$ に比例する. 従って,

$$\begin{aligned} I(s) &\propto N(v)\left|\frac{\Delta v}{\Delta s}\right| \\ &\propto v^3 \exp\left[-\frac{mv^2}{2k_B T}\right]\frac{v}{s} \\ &\propto \frac{1}{s^5}\exp\left[-\frac{m\omega^2 d^4}{8k_B T s^2}\right] \end{aligned} \tag{31}$$

6.

$$\begin{aligned} \frac{d\ln I}{ds} &\propto -\frac{5}{s} + \frac{m\omega^2 d^4}{4k_B T}\frac{1}{s^3} \\ &= \frac{-5s^2 + \frac{m\omega^2 d^4}{4k_B T}}{s^3} \end{aligned} \tag{32}$$

であるから,$\frac{dI}{ds} = 0$ となる s を s_{peak} とすると,

$$s_{peak} = \sqrt{\frac{m\omega^2 d^4}{20k_B T}} \propto \sqrt{m} \tag{33}$$

となる. 従って, 得られた黒化度分布の 2 つのピーク位置の 2 乗の比を取る事で, 気体分子量の比が分かる. [2]

3 第6問

1. 条件より

$$\exp(\frac{h\nu}{k_B T}) \simeq 1 + \frac{h\nu}{k_B T} \tag{34}$$

だから

$$I_T(\nu) = \frac{2k_B T\nu^2}{c^2} \tag{35}$$

となる.

[2]図は問題にも書いてあるので省略します.

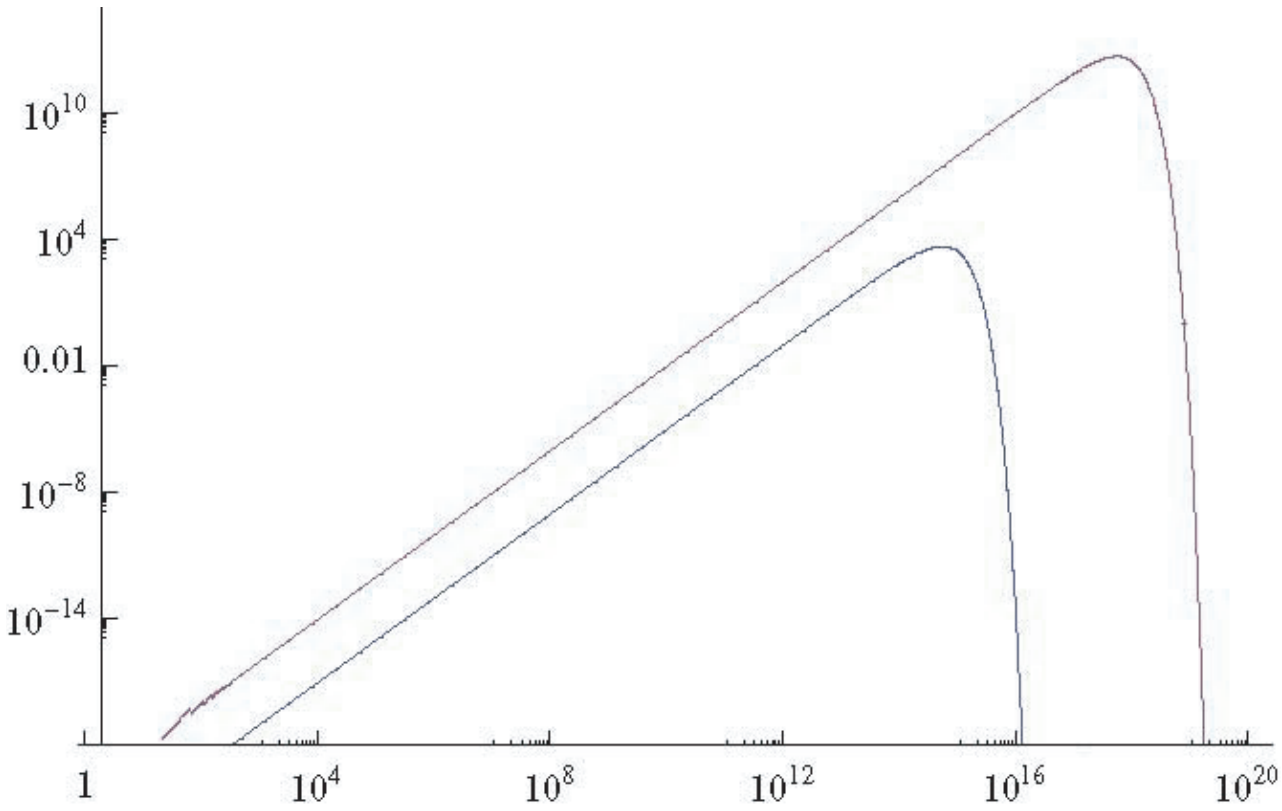

図 1: スペクトルと振動数の関係

2. $\alpha = \frac{h\nu}{k_B T}$ とおくと

$$\frac{\partial I_T(\nu)}{\partial \nu} = \frac{2h}{c^2}\nu^2 \frac{1}{e^\alpha - 1}(3 - \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha - 1}) \tag{36}$$

よって条件は $\frac{\partial I_T(\nu)}{\partial \nu} = 0$ だから

$$\nu_{peqk} = \frac{K_B T}{h}(1 - \exp(-\frac{h\nu}{k_B T}) \tag{37}$$

ここで $\nu_{peak} = a \times \frac{k_B T}{h}$ とおくと

$$a = 3(1 - e^{-a}) \tag{38}$$

と表せるから，ν_{peak} は T に比例し，a は問題で与えれた式を満たす.

3.

$$\nu_{peak} = 6 \times 10^{10} T \tag{39}$$

より，$T = T_1 = 10^4[K]$ のとき $\nu_{peak} = 6 \times 10^{14}[Hz]$，$\lambda = \frac{c}{\nu} = 5 \times 10^{-7}[m] = 500[nm]$ より可視光である．$T = T_2 = 10^7[k]$ のとき $\nu_{peak} = 6 \times 10^{17}[Hz]$，$\lambda = \frac{c}{\nu} = 5 \times 10^{-10}[m] = 0.5[nm]$ より X 線である．[3]

ここで ν が小さいときは設問 1 より I は ν^2 に比例し、ν が十分大きくなると exp で減衰する．また，先のピークを考慮し，設問の通り両対数でプロットすると，結果は 3 のようになる．ここで I が小さくかつピーク振動数も小さい方が $T = 10^4[K]$ に対応している．[4]

[3]X 線は 1[pm] から 10[nm] 程度の電磁波である．金属などの構造を調べるのに使われることを考えるとテスト中データが見られなくても推測しやすいかもしれない.

[4]Mathmatica で計算したものを PDF にし，さらに JPEG で編集して EPS にして張り付けたら汚くなりました … すみません。

4.
$$F(T) = \int \mathrm{d}\Omega \int_0^\infty \mathrm{d}\nu I_\nu(T) \tag{40}$$
だから，
$$F(T) = \frac{8\pi h}{c^2} \int_0^\infty \mathrm{d}\nu \frac{\nu^3}{\exp(\frac{h\nu}{k_B T}) - 1} \tag{41}$$
ここで $p = \frac{h\nu}{k_B T}$ の変数変換をすると
$$F(T) = \frac{8\pi K_B^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \mathrm{d}p \frac{p}{e^p - 1} \propto T^4 \tag{42}$$

5. もっとも遠心力が強いのは天体の表面であるから，重力，遠心力をそれぞれ f_g，f_c とおくと
$$f_g = G\frac{m}{R^2} \times \frac{4\pi R^3 \rho}{3} \tag{43}$$
$$f_c = mR\omega^2 = \frac{4\pi^2 mR}{P^2} \tag{44}$$
ここで条件は $f_c \leq f_g$ だから
$$\rho \geq \frac{3\pi}{GP^2} \tag{45}$$
より ρ の下限値は $\frac{3\pi}{GP^2}$ である．

6. 地球から見た天体は円に見える．このことを利用し，天体の温度を T，天体までの距離を r，天体の半径を R とすると
$$f \propto \frac{T^4 R^2}{r^2} \tag{46}$$
となる．[5]太陽の値を添え字 s で表すとすると比例関係より
$$R^2 = \frac{f}{f_s} \times (\frac{r}{r_s})^2 \times (\frac{T_s}{T})^4 \times R_s^2 \tag{47}$$
となる．与えられた数値を代入して
$$R \sim 1.3 \times 10^4 \sim 1 \times 10^4 [\mathrm{m}] \tag{48}$$
となる．

7. 設問５で求めた式に数値を代入して
$$\rho = \sqrt{3\pi} GP^2 \sim 1.3 \times 10^{17} \sim 1 \times 10^{17} [\mathrm{kg/m^3}] \tag{49}$$
ここで水の密度は
$$1[g/cm^3] = 10^{-3} \times 10^6 [kg/m^3] = 10^3 [\mathrm{kg/m^3}] \tag{50}$$
また原子核の密度は 0.17[核子/fm^3] だから 3×10^{17}[$\mathrm{kg/m^3}$] である．よってこの天体の密度は原子核のオーダーである．天体の質量の下限を求めると，
$$M = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3 = 1.09 \times 10^{30} [\mathrm{kg}] \sim 0.5 M_\odot \tag{51}$$
となる．[6]

[5]電磁波を放出している天体を中心とした球殻上で得られる単位時間あたりのエネルギーについて球殻表面で積分すると、その積分値は半径によらず一定になる．これがすなわち天体が単位時間に放出しているエネルギーと等しいからである．これにより地球で観測されるエネルギーに関して $f \propto \frac{1}{r^2}$ が成り立つのである．

[6]これは中性子星と考えられる．密度が原子核級ってことで中性子星か白色矮星が候補に挙がるが、中性子星の半径は 10[km] 程度，白色矮星の半径が地球と同程度なのでこの場合は中性子星である．ちなみに太陽質量の 1.5〜2.5 倍が限界質量で，それを超えるとブラックホールになってしまうっぽいです．そもそも問題の条件の表面温度が１０００万度って条件から中性子星を思い浮かべると計算結果の確かめが楽かもしれません．