平成２１年度東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻修士課程入学試験問題

数　　　学

平成２０年８月２５日（月）　１０時００分～１１時００分

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用すること。
3. 問題は全部で２問ある。２問すべてに解答せよ。
4. 答案用紙は各問につき１枚、合計２枚配布されていることを確かめること。
5. 各答案用紙の所定欄に科目名（数学）、受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
6. 解答は、各問ごとに別々の答案用紙を使用すること。
7. 答案用紙は点線で切り取られるので、裏面も使用する場合には、点線より上部を使用しないこと。
8. 答案用紙には解答に関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。
9. 解答できない場合でも、答案用紙に科目名（数学）、受験番号、氏名、問題番号を記入して提出すること。
10. 答案用紙を計算用紙として使用してはならない。計算用紙は別に配付する。

第１問

1. 実変数θに依存する２行２列の実対称行列

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \cos\theta + 3\sin\theta & -\sqrt{3}\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta \\ -\sqrt{3}\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta & 3\cos\theta + \sin\theta \end{pmatrix}$$

に対し、次の問に答えよ。なおθの範囲は$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$であるとする。

(i) 行列Aの２つの固有値を求めよ。

(ii) Aの対角成分の和$\mathrm{Tr}\,A$の３乗$(\mathrm{Tr}\,A)^3$とA^3の対角成分の和$\mathrm{Tr}\,(A^3)$の差をθの関数として

$$f(\theta) = (\mathrm{Tr}\,A)^3 - \mathrm{Tr}\,(A^3)$$

と置くとき、$f(\theta)$の最大値と最小値を求めよ。

(iii) Iを単位行列とするとき、Aの多項式から作られる行列

$$B = A^4 - A^2 + A + (\cos^2\theta\sin^2\theta - 1)I$$

が逆行列を持たないようなθの値を求めよ。

(iv) Bが逆行列B^{-1}を持つとき、B^{-1}を行列Aの１次式、すなわち係数$a_1(\theta)$, $a_0(\theta)$を用いて$B^{-1} = a_1(\theta)A + a_0(\theta)I$の形に表せ。

2. N行N列の実対称行列Xの全ての固有値λ_i（$i = 1, \ldots, N$）が非負$\lambda_i \geq 0$であるとする。

(i) 任意の自然数nに対して不等式

$$(\mathrm{Tr}\,X)^n \geq \mathrm{Tr}\,(X^n)$$

が成り立つことを証明せよ。

(ii) 上の不等式で等号$(\mathrm{Tr}\,X)^n = \mathrm{Tr}\,(X^n)$が成立するのは、固有値$\lambda_i$がどのような場合に限られるか。ただし$n \geq 2$とする。

第２問

実変数 t の関数 $f_1(t)$, $f_2(t)$ が次の連立1階常微分方程式を満たす。

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

ただし $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ は t の実関数であり、$i=\sqrt{-1}$ とする。

1. $|f_1(t)|^2+|f_2(t)|^2$ が t に依存しないことを示せ。

2. $f_1(t)=e^{-i\int_0^t a(\tau)d\tau}\tilde{f}_1(t)$, $f_2(t)=e^{-i\int_0^t c(\tau)d\tau}\tilde{f}_2(t)$ によって $\tilde{f}_1(t)$ と $\tilde{f}_2(t)$ を定義すると、これらが
$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \tilde{f}_1(t) \\ \tilde{f}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{b}(t) \\ \tilde{b}(t)^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{f}_1(t) \\ \tilde{f}_2(t) \end{pmatrix}$$
という形の常微分方程式を満たすことを示せ。またこのときの $\tilde{b}(t)$ の表式を求めよ。ただし $\tilde{b}(t)^*$ は $\tilde{b}(t)$ の複素共役を表す。

3. $a(t)=c(t)=0$ であり、$b(t)$ が定数 b_0 であるとする。式 (1) の解 $f_1(t)$ を、b_0 および $f_1(0)$, $f_2(0)$ を用いて表せ。

4. $a(t)=c(t)=0$ であり、$b(t)$ は $t\to-\infty$ で十分はやく減衰する関数であるとする。このとき、式 (1) の解 $f_1(t)$ を、$b(t)$ および $f_1(-\infty)$, $f_2(-\infty)$ を用いて表せ。ただし $f_1(-\infty)=\lim_{t\to-\infty}f_1(t)$ などである。

5. 設問4で、$b(t)$ が正の定数 β, ω, t_0 を用いて
$$b(t)=\frac{\beta\cos\omega t}{t^2+t_0^2}$$
で与えられる場合を考える。$f_1(-\infty)=1$, $f_2(-\infty)=0$ のとき、$|f_1(+\infty)|^2$, $|f_2(+\infty)|^2$ の値を求めよ。

平成 21 年度数学解答例

渡辺 悠樹

2009 年 6 月 9 日

第 1 問

1. (i) $\det(A-xI)=x^2+(\cos\theta+\sin\theta)x+\cos\theta\sin\theta=0 \quad \therefore x=\cos\theta,\sin\theta$

(ii) 実対称行列はエルミート行列の特殊場合であり，ユニタリ行列を用いて対角化できるので，

$$A=U\begin{pmatrix}\cos\theta & 0\\ 0 & \sin\theta\end{pmatrix}U^\dagger$$

とおく．このとき，

$$A^3=U\begin{pmatrix}\cos^3\theta & 0\\ 0 & \sin^3\theta\end{pmatrix}U^\dagger$$

であるが，trace はユニタリ不変なので，

$$f(\theta)=(\cos\theta+\sin\theta)^3-(\cos^3\theta+\sin^3\theta)=3\sqrt{2}(t^3-\frac{t}{2})$$

ここに，$t=\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\sqrt{2}}=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ とおいた．$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ であるから $\frac{1}{\sqrt{2}}\le t\le 1$ である．区間 $[\frac{1}{\sqrt{2}},1]$ における 3 次関数 $3\sqrt{2}(t^3-\dfrac{t}{2})$ の最大最小値問題と考えれば，直ちに

最大値 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ $(t=1\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき$)$， 最小値 0 $(t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\theta=0,\dfrac{\pi}{2}$ のとき$)$

を得る．

(iii)

$$\begin{aligned}B&=U\begin{pmatrix}\cos^4\theta-\cos^2\theta+\cos\theta+(\cos^2\theta\sin^2\theta-1) & 0\\ 0 & \sin^4\theta-\sin^2\theta+\sin\theta+(\cos^2\theta\sin^2\theta-1)\end{pmatrix}U^\dagger\\ &=U\begin{pmatrix}\cos\theta-1 & 0\\ 0 & \sin\theta-1\end{pmatrix}U^\dagger\end{aligned}$$

したがって $\det B=(\cos\theta-1)(\sin\theta-1)$ なので，$\theta=0,\dfrac{\pi}{2}$

(iv) $\theta\neq 0,\dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$B^{-1}=U\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\cos\theta-1} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\sin\theta-1}\end{pmatrix}U^\dagger=U\begin{pmatrix}a_1(\theta)\cos\theta+a_0(\theta) & 0\\ 0 & a_1(\theta)\sin\theta+a_0(\theta)\end{pmatrix}U^\dagger$$

だから，両辺を比べて連立方程式を作ることにより $a_1(\theta),a_0(\theta)$ が求まる．結局，

$$B^{-1}=\frac{-1}{(\cos\theta-1)(\sin\theta-1)}A+\frac{\cos\theta+\sin\theta-1}{(\cos\theta-1)(\sin\theta-1)}I$$

と表すことができる．($B=A-I$ を利用して，もっとうまく求める方法があるのかもしれません．)

2. (i) 前問と同様に，実対称行列はユニタリ行列を用いて対角化可能であり，かつ trace はユニタリ不変であるため，

$$\mathrm{Tr}X = \sum_i \lambda_i\,, \quad \mathrm{Tr}(X^n) = \sum_i \lambda_i^n$$

となるから，

$$g(\boldsymbol{\lambda}) = \left(\sum_i \lambda_i\right)^n - \sum_i \lambda_i^n$$

とおくと，

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda_j}(\boldsymbol{\lambda}) = n\left(\sum_i \lambda_i\right)^{n-1} - n\lambda_j^{n-1} \geq 0$$

かつ $g(\boldsymbol{\lambda} = 0) = 0$ より，題意は示された．（Cauchy-Schwarz の不等式みたいな定理があるんでしょうか？知ってる人がいたら教えてください.）

(ii) $n \geq 2$ のとき前問の証明から，λ_j が 0 でない有限の値で $g(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ となるためには，まず $\dfrac{\partial g}{\partial \lambda_j}(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ となるために λ_j 以外の固有値は全てゼロであることが必要である．このとき明らかに $g(\boldsymbol{\lambda}) = (\lambda_j)^n - \lambda_j^n = 0$ であるから，これで十分である．したがって，

$$\lambda_i = c\,\delta_{ij}\,, \quad (\,c \geq 0\,)$$

が求める条件である．

第 2 問

1.

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{pmatrix}$$

などとおくと，

$$i\dot{\boldsymbol{f}} = A\boldsymbol{f}, \quad -i\dot{\boldsymbol{f}}^\dagger = \boldsymbol{f}^\dagger A^\dagger, \quad i\frac{d}{dt}\boldsymbol{f}^\dagger \boldsymbol{f} = \cdots = \boldsymbol{f}^\dagger (A - A^\dagger)\boldsymbol{f} = 0$$

2.

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\int_0^t a(\tau)d\tau} & 0 \\ 0 & e^{i\int_0^t c(\tau)d\tau} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{f}} = U\boldsymbol{f}$$

とおくと，

$$i\dot{\tilde{\boldsymbol{f}}} = U(i\dot{\boldsymbol{f}}) + i\dot{U}\boldsymbol{f} = UA\boldsymbol{f} - U\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\boldsymbol{f} = U\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}U^\dagger \tilde{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 0 & b(t)e^{i\int_0^t (a(\tau)-c(\tau))d\tau} \\ b(t)e^{-i\int_0^t (a(\tau)-c(\tau))d\tau} & 0 \end{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{f}}$$

3.

$$\dot{\boldsymbol{f}} = -ib_0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{f} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f}(t) = \exp\left(-ib_0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}t\right)\boldsymbol{f}(0) = \begin{pmatrix} \cos(b_0 t) & -i\sin(b_0 t) \\ -i\sin(b_0 t) & \cos(b_0 t) \end{pmatrix}\boldsymbol{f}(0)$$

4.

$$\boldsymbol{f}(t) = \exp\left(-i\int_{-\infty}^t b(\tau)d\tau\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\boldsymbol{f}(-\infty) = \begin{pmatrix} \cos\left(\int_{-\infty}^t b(\tau)d\tau\right) & -i\sin\left(\int_{-\infty}^t b(\tau)d\tau\right) \\ -i\sin\left(\int_{-\infty}^t b(\tau)d\tau\right) & \cos\left(\int_{-\infty}^t b(\tau)d\tau\right) \end{pmatrix}\boldsymbol{f}(-\infty)$$

5.

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(\tau)d\tau = \omega\beta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos z}{z^2 + z_0^2}dz = \omega\beta\frac{\pi}{z_0 e^{z_0}} = \frac{\pi\beta}{t_0 e^{\omega t_0}}$$

$$\left(\because \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos z}{z^2 + z_0^2}dz = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz}}{z^2 + z_0^2}dz = \int_C \frac{e^{iz}}{(z - iz_0)(z + iz_0)}dz = 2\pi i\frac{e^{-z_0}}{(iz_0 + iz_0)} = \frac{\pi}{z_0 e^{z_0}}\right)$$

途中 $z_0 = \omega t_0$ とおいた．なお，C は「実軸 + 上半円」ととった．小問 4 の結果と合わせて，直ちに

$$|f_1(+\infty)|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi\beta}{t_0 e^{\omega t_0}}\right), \quad |f_2(+\infty)|^2 = \sin^2\left(\frac{\pi\beta}{t_0 e^{\omega t_0}}\right)$$

を得る．